

Semaine du 07 au 11 octobre 2024.
Généralités sur les fonctions, logarithme népérien.

Sujet 1

- 1. Question de cours :** Théorème des valeurs intermédiaires (énoncé).
- Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(2 + \cos(3x))$ dérivable sur \mathbb{R} .
Calculer $f'(x)$.
- Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{si } x \neq 3 \\ m & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Déterminer m pour que g soit continue sur $[0; +\infty[$.

Sujet 2

- 1. Question de cours :** Définitions de la dérivabilité.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ puis calculer $f'(x)$.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ tel que $f\left(c + \frac{b-a}{2}\right) = f(c)$.

Sujet 1

- Question de cours :** Exprimer $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ à l'aide de $\ln(a)$ et $\ln(b)$. Prouver ce résultat.
- Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.
 - Déterminer le domaine de définition et la domaine de dérivabilité de la fonction f .
 - Dresser le tableau de variations complet de f .

Sujet 2

- Question de cours :** Démonstration de la relation $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$.
- Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x - 2}}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ m & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Déterminer m pour que f soit continue sur $[1; +\infty[$.

- Soient $f, g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que pour tout réel $\lambda \geq 0$, il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = \lambda g(c)$.

Sujet 3

- Question de cours :** Définitions de la dérivabilité.
- Soit la fonction $f : x \mapsto x + \ln\left(\frac{3x + 1}{3x + 5}\right)$.
 - Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de la fonction f .
 - Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

Sujet 1

- Question de cours :** Définitions de la dérivabilité.
- Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.
 - Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
 - Dresser le tableau de variations complet de f .

Sujet 2

- Question de cours :** Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$. Exprimer $\ln(a^n)$ à l'aide de $\ln(a)$. Prouver ce résultat.
- Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$.
 - Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
 - Dresser le tableau de variations complet de f .

Sujet 3

- Question de cours :** Démonstration de la relation $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$.
- Soit la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si } x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ m & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Déterminer m pour que f soit continue sur $[-1; +\infty[$.
- Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $[-1; +\infty[$.

Sujet 1

- 1. Question de cours :** Démonstration de la relation $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$.
2. Soit la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
 - b. Dresser le tableau de variations complet de f .

Sujet 2

- 1. Question de cours :** Soient $a > 0$ et $b > 0$. Exprimer $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ à l'aide de $\ln(a)$ et $\ln(b)$. Prouver ce résultat.
2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
 - b. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.

Semaine du 30 septembre au 04 octobre 2024.

Généralités sur les fonctions.

Sujet 1

1. **Question de cours** : Définitions de la continuité.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(|4 - 3x| - |2x + 1|)$.
3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ tel que $f\left(c + \frac{b-a}{2}\right) = f(c)$

Sujet 2

1. **Question de cours** : Définitions d'une limite finie en $-\infty$, $+\infty$, une valeur finie.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x + 3 - \sqrt{x^2 + 2x}}$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ m & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue sur $[0; +\infty[$.

Sujet 3

1. **Question de cours** : Théorème des valeurs intermédiaires.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}}$.
3. Soit la fonction $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f .

Sujet 1

- 1. Question de cours :** Limite d'une fonction composée.
- Soit $f : \left[0; \frac{2}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f\left(\frac{2}{3}\right)$.
Montrer qu'il existe $c \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{3}\right) = f(c)$
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{|3x^2 + x - 2| - 3x - 3}$.

Sujet 2

- 1. Question de cours :** Définitions d'une limite $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$, une valeur finie.
- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ m & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Déterminer m pour que f soit continue sur \mathbb{R} .
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right)$.

Sujet 3

- 1. Question de cours :** Composition de fonctions monotones et sens de variation.
- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x^3}{x^3 - 3x + 2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -2\} \\ 0 & \text{si } x = -2 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} .
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x + 1 - \sqrt{2 - x}}$.

Sujet 1

1. **Question de cours** : Opérations sur les fonctions et sens de variation.

2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Montrer qu'il existe $c \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{4}\right) = f(c)$

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{|3x^2 + x - 2| - 3x - 3}$.

Sujet 2

1. **Question de cours** : Définitions d'une limite $+\infty$ en $-\infty$, $+\infty$, une valeur finie.

2. Soit la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3 - |x-5|}$.

Sujet 3

1. **Question de cours** : Définitions de la continuité.

2. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+13}-5}{\sqrt{x+4}-4} & \text{si } x \neq 12 \\ m & \text{si } x = 12 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue sur $[0; +\infty[$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(|3x-1| - |2x+1|)$.

Semaine du 23 au 27 septembre 2024.

Généralités sur les fonctions.

Sujet 1

1. **Question de cours** : Propriétés de comparaison des limites (énoncé + preuve du théorème des gendarmes).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x-1}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x - \sqrt{2x+6}}$.

Sujet 2

1. **Question de cours** : Limite d'une fonction composée (énoncé + preuve).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right)$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x^3 + x^2 - 2x}}$.

Sujet 3

1. **Question de cours** : Définitions de la continuité.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - 4}{\sqrt{x+21} - 5}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^2-1}$.

Sujet 1

1. **Question de cours :** Limite d'une fonction composée (énoncé + preuve).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{3x - 2} - x}$.

Sujet 2

1. **Question de cours :** Définitions de la continuité.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - x$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - x}}$.

Sujet 3

1. **Question de cours :** Définitions des limites (finie, $-\infty$, $+\infty$) en l'infini.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{|2x - 3| - |x + 5|}$.

Sujet 1

1. **Question de cours** : Définitions d'un minorant, d'un majorant, du maximum, du minimum d'une fonction.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 2} - x + 1}$

Sujet 2

1. **Question de cours** : Définitions des limites (finie, $-\infty$ et $+\infty$) en a (a réel).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(|2x - 1| - |x + 3|)$

Sujet 1

1. **Question de cours** : Opérations sur les fonctions et sens de variation (énoncé et preuve).
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 12} - 4}{\sqrt{x + 5} - 3}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2 + 2x - 3}}$

Sujet 2

1. **Question de cours** : Définitions des limites (finie, $-\infty$, $+\infty$) en $-\infty$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 2} - x + 1}$

Semaine du 16 au 20 septembre 2024.
Nombres réels, généralités sur les fonctions

Sujet 1

1. **Question de cours** : Définitions des fonctions paires, impaires et périodiques.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $-\frac{1}{2}x + 1 \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$.
3. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
 - b. Étudier la parité de la fonction f .

Sujet 2

1. **Question de cours** : Composition de fonctions monotones (énoncé et preuve).
2. Discuter, suivant la valeur de m , les solutions réelles de l'équation $mx^2 + x - m = 0$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2 - 3x - 2x^2}{x^2 + 5x + 4}}$.

Sujet 3

1. **Question de cours** : Montrer que pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$,
 $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{6x+19} = 3x+1$.
3. Donner l'ensemble de définition puis étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Sujet 1

1. **Question de cours** : Propriétés de la valeur absolue.
2. Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} .
Si f et g sont impaires, étudier la parité des fonctions $f + g$ puis $f \times g$.
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-1}$.

Sujet 2

1. **Question de cours** : Définitions d'un minorant, d'un majorant, du maximum, du minimum.
2. Soit f une fonction paire. Étudier la parité de la fonction $x \mapsto xf(x)$.
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x+3} < -x+4$.

Sujet 3

1. **Question de cours** : Opérations sur les fonctions et sens de variation (énoncé et preuve).
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $|2x-3| - |2-x| = 1$.
3. Montrer que, pour tout $t > 1$,

$$\frac{t + \frac{(t\sqrt{t})^2}{t} + \frac{1-t^2}{1-t}}{1+t} = 1+t$$

Sujet 1

1. **Question de cours** : Composition de fonctions monotones (énoncé et preuve).
2. Simplifier l'expression $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$
3. Résoudre dans \mathbb{R} , $|2x+1| \leq |x+2| + 2x$.
4. Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} .
Étudier la parité de la fonction $f \times g$ lorsque f est paire et g est impaire.

Sujet 2

1. **Question de cours** : Opérations sur les fonctions et sens de variation (énoncé et preuve).
2. Résoudre dans \mathbb{R} , $|x+3| - 2|x-1| > 2$.
3. Montrer que, pour tout réel $t > 0$,

$$\frac{2t - \frac{2}{t}}{\sqrt{t} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1-t^2}{1+t}} = \frac{1}{t^2}$$

Sujet 3

1. **Question de cours** : Définitions d'un minorant, d'un majorant, du maximum, du minimum.
2. Résoudre dans \mathbb{R} , $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$.