# Généralités sur les fonctions

*Les ensembles considérés dans ce chapitre sont tous des ensembles de réels et les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

## 1 Généralités

**Définitions, vocabulaire**

- Une **fonction** $f$ définie sur un ensemble $E$ est une **relation** qui à tout réel $x$ de $E$ associe un **unique** réel $f(x)$ appelé **image de $x$ par $f$**.
  On peut noter :
  $$f : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$
  $x$ est **un antécédent** de $f(x)$.
- On appelle **ensemble de définition** l'ensemble $E$.
  Si $E$ n'est pas défini, il s'agit de l'ensemble des réels $x$ tels que $f(x)$ existe.
- On appelle **graphe** d'une fonction $f$ définie sur l'ensemble $E$, l'ensemble des couples $(x; f(x))$ pour tout $x \in E$.
  La **représentation graphique**, ou courbe représentative, d'un telle fonction est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, pour tout $x \in E$, dans un repère du plan.
- Si $E$ est l'ensemble de définition de la fonction $f$ alors l'ensemble $f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$ est appelé **l'image de $f$**.

**Positions relatives de deux courbes**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $E$ et soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un même repère du plan.

$\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$ sur $E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$,
$f(x) > g(x)$.

### Définitions : Majorants,minorants, fonction bornée

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.

- $f$ est **majorée** si et seulement il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$.

  $M$ est alors **un majorant** de $f$ sur $E$, ou que $M$ majore $f$.

- $f$ est **minorée** si et seulement il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$.

  $m$ est alors **un minorant** de $f$ sur $E$, ou que $M$ minore $f$.

- On dit que $f$ est **bornée** si $f$ est à la fois majorée et minorée,

### Définitions : Maximum,minimum

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

- $f$ **possède un maximum** en $a$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant f(a)$.
  $f(a)$ est alors **le maximum** de $f$.

- $f$ **possède un minimum** en $a$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant f(a)$.
  $f(a)$ est alors **le minimum** de $f$.

### Opérations sur les fonctions

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $E$ et $k$ un réel.

- On note $kf$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $k \times f(x)$.
- On note $f + g$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $f(x) + g(x)$.
- On note $f \times g$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $f(x) \times g(x)$.
- Si $g$ ne s'annule pas sur $E$, on note $\dfrac{f}{g}$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

### Composition de fonctions

Soient $f$ une fonction définie sur un ensemble $E$ et $g$ une fonction définie sur un ensemble $F$ tel que $f(E) \subset F$.
On appelle **composée de $f$ suivie de** $g$, notée $g \circ f$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$.

### Remarques

- Avant d'effectuer la composition de deux fonctions, il est indispensable de bien étudier les ensembles de définition et l'ensemble image de la première fonction.
- Sauf cas particuliers, $g \circ f \neq f \circ g$.
  On dit que la composition n'est pas **commutative**.

### Définitions : parité, périodicité

Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $E$.

- $f$ est **paire** si et seulement si, pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$.
- $f$ est **impaire** si et seulement si, pour tout $x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.
- $f$ est **périodique de période** $T$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $x+T \in E$ et $f(x+T) = f(x)$.

### Propriétés

Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $E$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

- Une fonction $f$ est **paire** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_{\{}$ est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- Une fonction $f$ est **impaire** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_{\{}$ est **symétrique par rapport à l'origine du repère**. Une fonction $f$ est **périodique de période** $T$ si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{\imath}$.

## 2 Sens de variation

**Définitions**

Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $E$.

- $f$ est **croissante** sur $E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, $x < y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$.
- $f$ est **strictement croissante** sur $E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, $x < y$ implique $f(x) < f(y)$.
- $f$ est **décroissante** sur $E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, $x < y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$.
- $f$ est **strictement décroissante** sur $E$ si et seulement si, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, $x < y$ implique $f(x) > f(y)$.
- $f$ est **(strictement) monotone** sur $E$ si et seulement si $f$ est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur $E$.

**Propriétés : Opérations sur les fonctions et sens de variation**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $E$. Soit $k$ un réel.

- $\star$ Si $k > 0$ alors $f$ et $k \times f$ ont le même sens de variation.
  $\star$ Si $k < 0$ alors $f$ et $k \times f$ sont sens de variation contraires.
- Si $f$ et $g$ ont le même sens de variation alors $f + g$ a le même sens de variation que $f$ et $g$.
- Si $f$ et $g$ sont **positives** et ont le même sens de variation alors $f \times g$ a le même sens de variation que $f$ et $g$.

**Preuve**

**Exemple**

Soit la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$.
Justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**Propriété : Composition de fonctions monotones**

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(E) \subset F$.

- Si $f$ et $g$ sont monotones de **même sens de variation** alors $g \circ f$ est **croissante**.
- Si $f$ et $g$ sont monotones de **sens de variation contraires** alors $g \circ f$ est **décroissante**.

**Preuve**

# 3 Limites

**Définitions : Limite en l'infini**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit $\ell$ un réel.

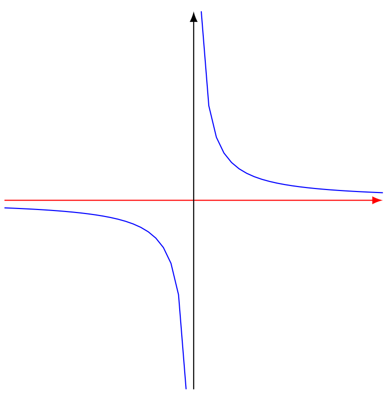
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A$, il existe un réel $B$ tel que $x > B$ implique $f(x) > A$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A$, il existe un réel $B$ tel que $x < B$ implique $f(x) > A$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A$, il existe un réel $B$ tel que $x > B$ implique $f(x) < A$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A$, il existe un réel $B$ tel que $x < B$ implique $f(x) < A$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $B$ tel que $x > B$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $B$ tel que $x < B$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur $]-\infty; b] \cup [a; +\infty[$ ($a, b$ réels).

La courbe représentant $f$ admet la droite d'équation $y = a$ pour **asymptote horizontale au voisinage de** $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.

### Illustration graphique



La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentant la fonction inverse aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

## Définitions : Limites en une valeur finie

Soient $a$ et $\ell$ deux réels. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $f(x) > A$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si et seulement si, pour tout réel $A$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $f(x) < A$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

## Remarque

On peut imposer que $x$ tende vers $a$ uniquement par valeurs inférieures ou supérieures. Dans ce cas, on parle de **limite à gauche** ou **limite à droite** et on note

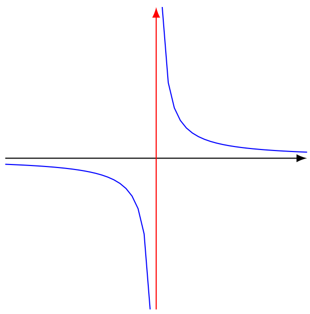
- pour la limite à gauche : $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ce qui imposera de considérer l'encadrement $a - \alpha < x < a$ ;
- pour la limite à droite : $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ce qui imposera de considérer l'encadrement $a < x < a + \alpha$ ;

## Définition

Soit $f$ une fonction définie sur $[b; a[\cup]a; c]$.

La courbe représentant $f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour **asymptote verticale** si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

### Illustration graphique



La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction inverse.

### Remarque

Dans un exercice, lorsque il est demandé d'interpréter graphiquement une limite, il est attendu l'équation d'une droite asymptote à la courbe représentant la fonction.

### Propriétés : Limites usuelles

Soit $a$ un réel. Pour tout $n$ entier naturel non nul,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \text{pour } a \geqslant 0, \ \lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

### Propriétés : Opérations les limites

Soient $f$ et $g$ des fonctions dont les ensembles de définitions sont compatibles, $\ell$ et $\ell'$ deux réels. $a$ est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

**Somme**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ...$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to a} g(x) = ...$ | $\ell'$ | $\ell'$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = ...$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

**Produit**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ...$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x) = ...$ | $\ell'$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = ...$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

**Quotient**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ...$ | $\ell$ | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x) = ...$ | $\ell' \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ...$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | FI | FI |

Pour les produits et les quotients, on applique la règle des signes.

Cas particulier

Lorsque on calcule la limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0 :

- soit le numérateur ne tend pas vers 0 et il faut alors étudier le signe du dénominateur pour savoir s'il tend vers $0^+$ ou $0^-$ ;
- soit le numérateur tend également vers 0 et on peut alors écrire que $x = a+h$ et faire tendre $h$ vers 0 au lieu de faire tendre $x$ vers $a$.

Propriétés

Soient $p$ et $q$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ réels et $a_n \neq 0$

$p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ avec $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ réels et $b_m \neq 0$

Alors,

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

**Preuve**

**Propriétés : Limites et comparaison**

$a$ est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Soient $f, g, h$ des fonctions des fonctions définies au voisinage de $a$.
Soit $\ell$ un réel.

- Si, pour tout $x$ au voisinage de $a$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si, pour tout $x$ au voisinage de $a$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- Si, pour tout $x$ au voisinage de $a$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et

  si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell = \lim_{x \to a} h(x)$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$. (théorème des gendarmes)

**Preuve**

*On ne fait que la preuve du théorème des gendarmes pour $a$ réel.*

**Exemple**

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(x)}{x+1}$

**Propriété : Limite d'une fonction composée**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions.
Soient $a, b$ et $\ell$ des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$ tels que $f$ soit définie au voisinage de $a$ et $g$ soit définie au voisinage de $b$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ **et** $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.

**Preuve**

## Exemple

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)$.

**Méthode : Calcul d'une limite**

Pour calculer une limite, on peut effectuer la démarche suivante :

- Calculer très rapidement (de tête ou au brouillon) les limites des différents termes pour voir s'il y a une forme indéterminée ou pas.
- S'il n'y a pas de forme indéterminée, faire le calcul direct.
- S'il y a un quotient dont le dénominateur tend vers $0$, on peut établir le tableau de signe du dénominateur afin de savoir si on tend vers $0$ par des valeurs inférieures ($0^-$) ou des valeurs supérieures ($0^+$) afin de pouvoir appliquer la règle des signes.
- S'il y a une forme indéterminée, on peut :
  - ⋆ dans le cas d'une différence avec une (ou deux) racine carrée, on peut utiliser l'égalité

    $$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{(a et b positifs)}$$

  - ⋆ Dans le cas d'une différence d'infinis ou d'un quotient d'infini, on peut factoriser par ce *"qui tend le plus vite"* vers l'infini. Lorsqu'il s'agit d'un quotient, on factorisera de préférence le numérateur par son terme qui *"tend le plus vite"* vers l'infini et le dénominateur par son terme qui *"tend le plus vite"* vers l'infini.
  - ⋆ Dans le cas d'un quotient où le dénominateur et le numérateur tendent tous les deux vers 0, on pourra remplacer $x$ par $a+h$ (où $a$ désigne la valeur vers laquelle tend $x$) puis faire tendre $h$ vers $0$ ou retrouver un taux de variation et utiliser la définition du nombre dérivé.

## 4 Continuité

**Définitions : Continuité**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$.

- $f$ est **continue en** $a$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- $f$ est **continue sur** $I$ si et seulement si $f$ est continue en tout $a \in I$.

### Remarques

- Si $a$ est une borne de l'intervalle $I$, on considère la limite à gauche ou à droite.
- Pour prouver qu'une fonction n'est pas continue en une valeur $a$, on prouve généralement que la limite à gauche ou la limite à droite n'est pas égale à $f(a)$.

### Propriétés : Opérations sur les fonctions et continuité

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et $k$ un réel.

- Si $f$ est continue sur $I$ alors $|f|$ est continue sur $I$.
- Si $f$ est continue sur $I$ alors $kf$ est continue sur $I$.
- Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ alors $f + g$ est continue sur $I$.
- Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ alors $f \times g$ est continue sur $I$.
- Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$ et si, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $I$.

### Propriété : Composition de fonctions et continuité

Soient $I$ et $J$ deux intervalles.
Soient $f$ une fonction définie sur $I$ telle que $f(I) \subset J$ et $g$ une fonction définie sur $J$.

Si $f$ est continue sur $I$ et si $g$ est continue sur $J$ alors $g \circ f$ est continue sur $I$.

### Propriété

Les fonctions usuelles (polynômes, valeur absolue, inverse, racine carrée, logarithmes, exponentielles, ...) sont continues sur leurs ensembles de définition.

**Remarque**

Pour justifier de la continuité d'une fonctions à l'aide des propriétés ci-dessus, on pourra utiliser l'expression *"par les théorèmes généraux"* mais il faudra être capable de détailler le raisonnement si demandé.

**Exemple**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction définie et **continue** sur $[a;b]$ $(a < b)$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a;b]$.

**Cas particulier**

Soit $f$ une fonction définie et **continue** sur $[a;b]$ ($a < b$).

Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

**Exemple**

Soit $f : [0;1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.

**Propriété**

Soit $f$ une fonction définie et **continue** sur un intervalle $]a;b[$ avec $a$ réel ou $-\infty$ et $b$ réel ou $+\infty$.

Pour tout réel $k$ strictement compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation

$f(x) = k$ admet au moins une solution sur $]a;b[$.

**Exercice**

Montrer que l'équation $-2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

**Théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones**

- Si $f$ est une fonction **continue et strictement monotone** sur $[a;b]$ ($a < b$) alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a;b]$.

- Si $f$ est une fonction **continue et strictement monotone** sur $]a;b[$ ($a < b$) alors, pour tout réel $k$ strictement compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $]a;b[$.

## 5 Dérivabilité

**Définitions**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$.

- La fonction $f$ est **dérivable en** $a$ et admet pour **nombre dérivé** $f'(a)$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

- La fonction $f$ est **dérivable sur** $I$ si et seulement si $f$ est dérivable en tout $a \in I$.

- Si $f$ est dérivable sur l'intervalle $I$ alors on appelle **fonction dérivée de** $f$, notée $f'$, la fonction qui à tout réel de $I$ associe son nombre dérivé.
  On note

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

**Remarque**

Lors du calcul de la limite d'un quotient, si le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, il y a une forme indéterminée.
L'utilisation d'un taux de variation peut permettre, à l'aide de la définition du nombre dérivé, de lever la forme indéterminée.

**Interprétation graphique**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et dérivable en $a \in I$.

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur** la tangente, à la courbe représentant la fonction $f$, au point d'abscisse $a$.

**Propriété : Équation de la tangente**

Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $a \in I$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentant $f$ au point d'abscisse $a$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Propriété : Dérivabilité et continuité**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

Si $f$ est **dérivable** sur $I$ alors $f$ est **continue** sur $I$.

**Attention !!**

**La réciproque est fausse** !
Une fonction peut-être continue mais pas dérivable.

### Exemple

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 3x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

## Propriétés : Dérivées des fonctions usuelles

| Fonction | Dérivée | Intervalle |
|---|---|---|
| $x \longmapsto k$, $k \in \mathbb{R}$ | $x \longmapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ (si $n > 0$) ou $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$) |
| $x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$ |
| $x \longmapsto e^x$ | $x \longmapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \ln(x)$ | $x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $]0; +\infty[$ |
| $x \longmapsto \cos x$ | $x \longmapsto -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \sin x$ | $x \longmapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ |

## Propriétés : Opérations sur les fonctions et dérivation

Si $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables sur un intervalle $I$

| Fonction | Dérivée | Condition |
|---|---|---|
| $u + v$ | $u' + v'$ | |
| $k \times u$, $k \in \mathbb{R}$ | $k \times u'$ | |
| $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ | |
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ | $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ |
| $v \circ u$ | $u' \times v' \circ u$ | |
| $\mathrm{e}^u$ | $u'\mathrm{e}^u$ | |
| $\ln(u)$ | $\frac{u'}{u}$ | $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$ |
| $u^n$ | $nu'u^{n-1}$ | $n \in \mathbb{Z}^*$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$ |
| $\cos(u)$ | $-u' \sin(u)$ | |
| $\sin(u)$ | $u' \cos(u)$ | |

**Remarque**

Comme pour la continuité, on pourra justifier de la dérivabilité d'une fonction à l'aide de l'expression *"par les théorèmes généraux"*.

**Propriétés : Dérivation et sens de variation**

Soient $I$ un **intervalle** et $f$ une fonction **dérivable** sur $I$.

- $f$ est **croissante** sur $I$ si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- $f$ est **décroissante** sur $I$ si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- $f$ est **constante** sur $I$ si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

**Remarques**

- On étudie donc le **signe de la dérivée** pour connaître le **sens de variation de la fonction**.
- Lorsque la fonction dérivée ne s'annule que pour des valeurs "isolées", sans changer de signe, alors la fonction est strictement monotone.
  Par exemple, la fonction cube ($x \longmapsto x^3$) a sa fonction dérivée ($x \longmapsto 3x^2$) qui s'annule uniquement en $x = 0$ et qui est positive pour toutes les autres valeurs. La fonction cube est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Exemple**

Soit la fonction $f : x \longmapsto (x^2 + x - 2)\sqrt{x}$.

**a.** Indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de $f$.

**b.** Calculer $f'(x)$.

**c.** Dresser le tableau de variations complet de $f$.