Généralités sur les fonctions

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
2. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{2 - |x-3|}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Déterminer $f\left(]1; +\infty[\right)$, l'ensemble image de $]1; +\infty[$ par f.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+4}{x+3}$.

De quel intervalle I l'intervalle $]1; +\infty[$ est-il l'image par f ?

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^2 - (x^2 + x + 2)^2$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. f est-elle paire ? impaire ?

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Étudier la parité de $g \circ f$ en fonction de la parité de f et de la parité de g.

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, monotone, de signe constant et ne s'annulant jamais.

Étudier le sens de variation de la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{|f|}}$.

1. Lorsque f est strictement croissante et positive.

2. Lorsque f est strictement décroissante et négative.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur $[0; +\infty[$.

1. Montrer que si f est impaire alors f est monotone sur $]-\infty; 0]$ de même sens.

2. Montrer que si f est paire alors f est monotone sur $]-\infty; 0]$ de sens contraire.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Montrer que la fonction f est impaire.

3. Sans calculer la fonction dérivée, étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice 9

Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$

4. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 9} + x - 3$

Exercice 10
Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^4-16}{x}$$

Exercice 11
Calculer
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$$

Exercice 12
Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2}$$

Exercice 13
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Étudier, suivant les valeurs de a, la limite
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{a}{(x^2-1)^2} \right)$$

Exercice 14
Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{1-x^2}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
2. Montrer que, pour tout $x > 1$, $f(x) = -2 + \dfrac{1}{1-x^2}$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

Exercice 15
À l'aide des définitions des limites, montrer que si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g \circ f(x) = 3$.

Exercice 16
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17
Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ m & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue sur $[0;+\infty[$.

Exercice 18
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$(g(a)-f(a))\,(g(b)-f(b)) \leqslant 0$$

Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 19
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c+\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 20
À l'aide de la définition, calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$ pour $x = 2$.

Exercice 21
Déterminer le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée.

1. $f_1 : x \longmapsto x\sqrt{x}$.
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
3. $f_3 : x \longmapsto \sqrt{1-e^x}$.

Exercice 22

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23

Soient a, b, c trois nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x + cx^2}{x - 2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a. Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b. Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Tracer l'allure de la courbe représentant la fonction f.

Exercice 25

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas.
Calculer, en fonction de f', la dérivée des fonctions suivantes (en précisant l'ensemble de dérivabilité).

1. $u_1 : x \longmapsto f(3 - 2x)$.

2. $u_2 : x \longmapsto (f(x))^2$

3. $u_3 : x \longmapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $u_4 : x \longmapsto \sin(f(\sin x))$

5. $u_5 : x \longmapsto \dfrac{1}{f(\ln(x))}$

Exercice 26
Dresser le tableau de variations complet de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

On pensera à bien préciser le domaine de dérivabilité avant de calculer $f'(x)$.

Exercice 27
Soit la fonction h définie par $h(x) = |x-3| - \dfrac{2}{x-1}$ sur un ensemble de définition à déterminer.
Dresser le tableau de variations complet de la fonction h.

Exercice 28
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout $x \in [0;+\infty[, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.