

# TD 2 : Étude d'une fonction de la variable réelle

## Plan général d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction  $f : x \mapsto f(x)$ , les étapes sont généralement les suivantes

- **Première étape** : On détermine l'**ensemble de définition**,  $\mathcal{D}_f$ , qui est l'ensemble des réels  $x$  tels que  $f(x)$  existe.
- **Deuxième étape** : On réduit, lorsque cela est possible, l'ensemble de définition à l'**ensemble d'étude**. Trois propriétés permettent éventuellement de le réduire : le fait que  $f$  soit paire, impaire ou périodique.
- **Troisième étape** : On étudie les limites de la fonction aux bornes de l'ensemble de définition pour compléter le tableau de variations.
- **Quatrième étape** : On étudie les variations de  $f$  sur l'intervalle d'étude, notamment grâce au signe de la dérivée  $f'$ . Les images des valeurs remarquables doivent être calculées.
- **Cinquième étape** : On trace l'allure de la courbe représentant la fonction en faisant apparaître :
  - ★ les points à tangente horizontale, où  $f'(x) = 0$  ;
  - ★ les points où  $f$  est définie mais pas  $f'$ , avec la tangente en ces points (principalement pour des fonctions irrationnelles) ;
  - ★ les asymptotes éventuelles (avec positions relatives de la courbe et des asymptotes) ou les "points d'arrêt" (les bornes de l'ensemble de définition).

On peut également calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe.

### Exercice 1

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{-x}{x^2 + 1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Étudier la parité de la fonction  $f$  et en déduire le domaine d'étude de la fonction  $f$ .
2.
  - a. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. En déduire les équations des asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ses asymptotes.
5. Dans un même repère, tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$  et ses asymptotes.

### Exercice 2

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{-2}{(x^2 + 3x - 10)^3}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2.
  - a. Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - b. En déduire les équations des asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ses asymptotes.
5. Dans un même repère, tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$  et ses asymptotes.

### Exercice 3

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{1 + \sqrt{4 - x}}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la parité de la fonction  $f$  et en déduire le domaine d'étude de la fonction  $f$ .
3. Étudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variations de  $f$ .