Nombres réels

1 Fractions, racines, puissances

Fractions

Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- ⋆ Pour **additionner** ou soustraire deux fractions, il faut les mettre sur le même dénominateur.
  Un dénominateur commun simple à trouver est le produit des dénominateurs des fractions.
  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$
  $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$$
- ⋆ Le **produit** de deux fractions est égale au produit des numérateurs divisé par le produit des dénominateurs
  $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
  En particulier, on a
  $$a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$
  Mais aussi
  $$\frac{ad}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{d} = \frac{a}{c}$$
- ⋆ **Diviser** par un nombre équivaut à multiplier par son inverse
  $$\frac{a}{\frac{b}{d}} = a \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{b}$$
- ⋆ L'opposé de $\frac{a}{b}$ est $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
  En particulier,
  $$-\frac{a+b}{c} = \frac{-a-b}{c}$$
- ⋆ On simplifie une fraction à chaque fois que cela est possible.
- ⋆ Les règles du calcul fractionnaire s'appliquent aussi pour les expressions littérales.
  Généralement, il est inutile de développer un dénominateur.

Puissances

Soient a et b deux nombres **réels non nuls** et n un nombre **entier naturel non nul**.

- Par définition, a^n est égal au produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a$$

  On convient que $a^0 = 1$.

- Si p est un entier naturel,

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$
$$(a^n)^p = a^{np}$$

-

$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$b^{-n} = \frac{1}{b^n} \qquad \frac{b^n}{b^p} = b^{n-p} \; ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Racines carrées

Si a est un nombre réel **positif**, alors la racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel **positif** tel que

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Soient a, b deux nombres réels positifs, $b \neq 0$.

- La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

  En décomposant un nombre sous la forme d'un produit, cette propriété permet de simplifier une racine carrée.

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

- La racine carrée d'un quotient est égale au quotient des racines carrées

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

- $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$ et, en conséquence, pour $a \neq b$,

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

⋆ Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$

⋆ Il est bon de connaître les premières racines carrées remarquables

$$\sqrt{0} = 0\ ;\ \sqrt{1} = 1\ ;\ \sqrt{4} = 2\ ;\ \sqrt{9} = 3\ ;\ \sqrt{16} = 4\ ;\ \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6\ ;\ \sqrt{49} = 7\ ;\ \sqrt{64} = 8\ ;\ \sqrt{81} = 9\ ;\ \sqrt{100} = 10\ ;\ \sqrt{11} = 121$$

$$\sqrt{144} = 12\ ;\ \sqrt{169} = 13\ ;\ \sqrt{196} = 14\ ;\ \sqrt{225} = 15\ ;\ \sqrt{256} = 16$$

Propriété : Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels. Alors,

- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2 Équations

Définitions

- On appelle **équation** (réelle) la donnée d'une égalité faisant intervenir une (ou des) **variable(s)** réelle(s), appelée(s) inconnues.
- On appelle **domaine de définition** d'une équation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans l'équation sont bien définies.

Soit *(E)* une équation à une inconnue réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

- On appelle **solution** de *(E)* tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que l'égalité obtenue en substituant la valeur x à l'inconnue est vraie.
- On appelle **ensemble des solutions** de *(E)* l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui sont solutions de *(E)*.
- **Résoudre** *(E)*, c'est déterminer l'ensemble des solutions de *(E)*. Deux équations sont **équivalentes** si et seulement si elles ont le même ensemble de solution.

Propriétés

À partir d'une égalité, on obtient une égalité équivalente en :

- **ajoutant** une même expression à chaque membre de l'égalité ;
- **multipliant** chaque membre de l'égalité par un même réel **non nul** ;
- en **appliquant une même fonction strictement monotone** à chaque membre d'une égalité, sous réserve que cette fonction soit bien définie en ces valeurs.
  Par exemple, on pourra appliquer la fonction exponentielle, la fonction logarithme si chaque membre de l'égalité est strictement positif, la fonction racine carrée si chaque membre de l'égalité est positif...

De plus,

- un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul;
- un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (et pas son dénominateur);
- pour équation de degré deux, la méthode du discriminant permet d'obtenir l'ensemble des solutions réelles.

Méthode : Résolution par équivalence

Pour résoudre une équation à l'aide d'équations équivalentes, on peut :

1. déterminer la domaine de définition de l'équation ;
2. raisonner par équivalences successives en se cantonnant à l'ensemble de définition de l'équation.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{x}=-3$.

Méthode : Résolution par analyse et synthèse

Lorsqu'il n'est pas possible, ou aisé, de raisonner par équivalences, il est possible de raisonner en ne considérant que les conditions nécessaires à l'existence des solutions (analyse).
Une fois ces "solutions potentielles" trouvées, on les teste afin de ne conserver que celles qui sont effectivement solutions de l'équation (synthèse).

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-4x-6}=0$

Méthode : Changement d'inconnue

Pour résoudre une équation d'inconnue x, il peut être judicieux de définir une "nouvelle inconnue", $X = f(x)$.
On résout alors la nouvelle équation d'inconnue X.
Pour chaque solution X_k trouvée, on résout alors l'équation d'inconnue x,
$f(x) = X_k$ pour trouver les solution de l'équation initiale.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$.

3 Inéquations

Définitions

- On appelle **inéquation** (réelle) la donnée d'une inégalité faisant intervenir une (ou des) **variable(s)** réelle(s), appelée(s) inconnues.
- On appelle **domaine de définition** d'une inéquation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans l'équation sont bien définies.

Soit une inéquation à une inconnue réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

- On appelle **solution** de l'inéquation tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que l'inégalité obtenue en substituant la valeur x à l'inconnue est vraie.
- On appelle **ensemble des solutions** l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui sont solutions de l'inéquation.
- **Résoudre** une inéquation, c'est déterminer l'ensemble des solutions de *(E)*. Deux inéquations sont **équivalentes** si et seulement si elles ont le même ensemble de solution.

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels.

- Pour tout réel k, $a < b \Longleftrightarrow a + k < b + k$.
- Pour tout réel $k > 0$, $a < b \Longleftrightarrow ak < bk$.
- Pour tout réel $k < 0$, $a < b \Longleftrightarrow ak > bk$.
- Pour toute fonction f **strictement croissante** sur $[a, b]$,

  $a < b \Longleftrightarrow f(a) < f(b)$
- Pour toute fonction f **strictement décroissante** sur $[a, b]$,

  $a < b \Longleftrightarrow f(a) > f(b)$

Méthode : Résolution par équivalence

Pour résoudre une inéquation à l'aide d'équations équivalentes, on peut :

1. déterminer la domaine de définition de l'inéquation ;
2. raisonner par équivalences successives en se cantonnant à l'ensemble de définition de l'équation.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+2} \leqslant 3$.

Méthode : Résolution par tableau de signes

Pour résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signes, on peut

- se ramener, par équivalence, à une comparaison avec zéro.
- Factoriser l'expression non nulle.
- Étudier le signe de l'expression factorisée à l'aide d'un tableau de signes.
- Sélectionner les intervalles solutions.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{x-3}{2x+1} \geqslant \dfrac{x}{3x+6}$.

Méthode : Par disjonction des cas

Lorsqu'il n'est pas possible de travailler avec des inéquations équivalentes pour toutes les valeurs du domaine de définition, il est possible de raisonner par disjonction des cas, c'est-à-dire en partitionnant le domaine de définition en des sous-ensembles pour lesquels un raisonnement par équivalences est possible.

Exemple

Résoudre l'inéquation $\sqrt{2x+1} \geqslant x-1$.

4 Égalités et inégalités

Méthode : Prouver une égalité

Pour prouver que deux expressions A et B sont égales, on peut

- soit transformer A par des opérations algébriques (développement, réduction, factorisation, mise au même dénominateur, ...) pour obtenir B;
- soit transformer A et B par des opérations algébriques pour obtenir une expression commune C;
- soit prouver que la différence $A - B$ est nulle.

Exemple

Prouver que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Propriétés

Soient a, b, c et d des réels.

- Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.
- Si $0 \leqslant a < b$ et $0 \leqslant c < d$ alors $0 \leqslant ac < bd$.
- Si b est positif,
$$a^2 \leqslant b \iff -\sqrt{b} \leqslant a \leqslant \sqrt{b}$$
$$a^2 \geqslant b \iff a \leqslant -\sqrt{b} \text{ ou } a \geqslant \sqrt{b}$$

Méthode : Encadrer une expression algébrique

- Pour encadrer une somme, on peut encadrer chaque terme de la somme puis "additionner ces encadrements".
  Dans le cas d'une différence, on considère la somme de l'opposé du terme soustrait.
- Pour encadrer un produit de facteurs **positifs**, on peut encadrer chaque facteur du produit puis "multiplier ces encadrements".
  Dans le cas d'un quotient, on considère le produit par l'inverse du dénominateur.

Exemple

Si $x \in [-1; 4]$ et $y \in [5; 7]$. Déterminer un encadrement de $\dfrac{y - x}{y + x}$.

Attention !!

Pour prouver une égalité, on évite de commencer par écrire qu'elles sont égales, ou alors on résout une équation.

Méthode : Prouver une inégalité

Pour justifier une inégalité, on peut (après avoir éventuellement déterminé une inégalité équivalente)

- étudier le signe de la différence des deux membres.
  Cette étude peut être faite par factorisation et à l'aide d'un tableau de signes mais aussi en étudiant la fonction définie par cette différence.
- Obtenir l'inégalité à partir d'une inégalité initiale puis par inégalités équivalentes successives.
- Raisonner par disjonction des cas.

Exemple

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.
Montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5 Valeur absolue

Valeur absolue

Pour tout réel x,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En conséquence, pour tout réel x,

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \text{et} \quad |x|^2 = x^2$$

Propriétés

Soient x et y deux nombres réels.

- Si a est un nombre réel **positif**,

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

$$|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a$$

- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Méthode : Résolution d'équations ou d'inéquations

Pour résoudre une équation ou une inéquation contenant un, ou plusieurs, valeur absolue, on peut

- déterminer le domaine de définition de l'(in)équation puis résoudre par (in)égalités équivalentes ;
- raisonner par analyse et synthèse ;
- raisonner par disjonction des cas en étudiant le signe de chacune des expressions présente dans une valeur absolue.

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-1| \geqslant |x+3|$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+3|+|3x-2|=4$.