TD 1 : Équations dans $\mathbb{R}(1)$

1 Résolution d'une équation

Définitions : équation, domaine de définition

- On appelle **équation** (réelle) la donnée d'une égalité faisant intervenir une (ou des) **variable(s)** réelle(s), appelée(s) inconnues.
- On appelle **domaine de définition** d'une équation l'ensemble des valeurs de la (des) variable(s) pour lesquelles les expressions intervenant dans l'équation sont bien définies.

Exercice 1
Déterminer le domaine de définition de chacune des équations ci-dessous.

1. $\dfrac{x+2}{x-3} = 2$

2. $\dfrac{2x-5}{x+3} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

3. $\sqrt{x^2-4} = 1-x$

4. $\ln(x+1) = \ln(2-x)$

Définitions : solutions

Soit *(E)* une équation à une inconnue réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

- On appelle **solution** de *(E)* tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que l'égalité obtenue en substituant la valeur x à l'inconnue est vraie.
- On appelle **ensemble des solutions** de *(E)* l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui sont solutions de *(E)*.
- **Résoudre** *(E)*, c'est déterminer l'ensemble des solutions de *(E)*.

2 Équations équivalentes

Définition : équations équivalentes

Deux équations sont **équivalentes** si et seulement si elles ont le même ensemble de solution.

Propriétés

À partir d'une égalité, on obtient une égalité équivalente en :

- **ajoutant** une même expression à chaque membre de l'égalité ;
- **multipliant** chaque membre de l'égalité par un même réel **non nul** ;
- en **appliquant une même fonction strictement monotone** à chaque membre d'une égalité, sous réserve que cette fonction soit bien définie en ces valeurs.
  Par exemple, on pourra appliquer la fonction exponentielle, la fonction logarithme si chaque membre de l'égalité est strictement positif, la fonction racine carrée si chaque membre de l'égalité est positif...

De plus,

- un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul;
- un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (et pas son dénominateur);
- pour équation de degré deux, la méthode du discriminant permet d'obtenir l'ensemble des solutions réelles.

Méthode

Pour résoudre une équation à l'aide d'équations équivalentes, on peut :

1. déterminer la domaine de définition de l'équation ;
2. raisonner par équivalences successives en se cantonnant à l'ensemble de définition de l'équation.

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\dfrac{x+2}{x-3} = 2$
2. $\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $\dfrac{2x-5}{x+3} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$
4. $\sqrt{x^2-4} = 1-x$
5. $\ln(4x-3x^2) = 0$
6. $\dfrac{e^x-1}{e^x+2} = \dfrac{1}{2}$
7. $\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = \ln(3)$
8. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$