

RÉVISIONS

Chaque chapitre débute par un rappel succinct des résultats du cours et contient deux ou trois exercices.

Plusieurs de ces exercices sont issus de la BNS (Banque Nationale de Sujets).

Les chapitres marqués d'un astérisque sont les chapitres qui ne seront pas utilisés en mathématiques complémentaires.

Un corrigé sera proposé dans quelques jours.

*Si vous avez des questions ou des demandes d'explications, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse e-mail suivante : **mathemagicienne@mathsaulma.fr***

BONNES VACANCES !!

Second degré

Rappels de cours

Soient a, b et c trois réels, a non nul.

★ La fonction **polynôme du second degré** $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines.

★ Soit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

◆ Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a alors,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

◆ Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ a une racine réelle $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

On a alors,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

◆ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ admet deux racines complexes.

★ On appelle **forme canonique** d'une fonction polynôme de degré 2 son écriture sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

★ On a le tableau de variations

◆ Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$	$\searrow \quad \nearrow$ β		

◆ Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$	$\nearrow \quad \searrow$ β		

★ La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** dont l'axe de symétrie a pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 1

On considère la fonction $P : x \mapsto -2x^2 + 2x + 24$ définie sur $\mathbb{R}$.

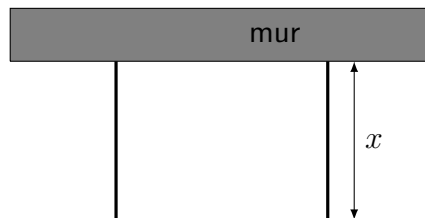
1.
 - a. Déterminer les racines de P .
 - b. En déduire une factorisation de $P(x)$.
 - c. Résoudre l'inéquation $2x^2 - 13 < 2x + 11$.
2.
 - a. Déterminer la forme canonique de $P(x)$.
 - b. En déduire le tableau de variation de P .
 - c. Pour quelle valeur de x , $P(x)$ est-il maximal ? Quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice 2

Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur de sa ferme afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos.

Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale.

On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.



On appelle A la fonction qui à un nombre x associe $A(x)$ l'aire de l'enclos. La fonction A est ainsi définie sur l'intervalle $[0; 14]$.

1.
 - a. Vérifier que l'aire $A(x) = -2x^2 + 28x$
 - b. Montrer que la forme canonique de $A(x)$ est $-2(x - 7)^2 + 98$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction A .
3. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Donner la valeur de cette aire.

(d'après BNS)

Exercice 3

Exercice de recherche.

Soit m un réel.

Déterminer les valeurs de m telles que, pour tout réel x , on ait

$$\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$$

Dérivation

Rappels de cours

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I , $a \in I$ et f' la fonction dérivée de f sur I .

- ★ Le nombre dérivé de la fonction f en a , $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse a .
- ★ L'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- ★ Le coefficient directeur d'une droite se détermine graphiquement en faisant le quotient

$$\text{coefficient directeur} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

- ★ Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est **croissante** sur I .
- ★ Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est **décroissante** sur I .
- ★ On étudie donc le **signe de la dérivée** pour connaître le **sens de variation de la fonction**.
- ★ Pour les fonctions usuelles, on a les dérivées

Fonction	Dérivée	Intervalle
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

- ★ Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	
$k \times u, k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$	
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$x \mapsto u(ax + b)$	$x \mapsto au'(ax + b)$	

Exercice 4

Une entreprise produit du tissu.

Le coût total de production (en €) de production de l'entreprise est modélisé par la fonction

$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$ où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?
2. Montrer que $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$
3. Donner une expression de $B'(x)$ où B' est la fonction dérivée de la fonction B .
4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0; 10]$ puis le tableau de variations de la fonction B .
5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

(BNS)

Exercice 5

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1; 5]$ par

$$f(x) = \frac{0,5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}$$

1. Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.
2. On admet que f est dérivable sur $[1; 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel $x \in [1; 5]$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$$

3. Montrer que, pour tout réel x , $x^3 - 3x^2 - 16 = (x - 4)(x^2 + x + 4)$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[1; 5]$.
5. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

(BNS)

Exercice 6

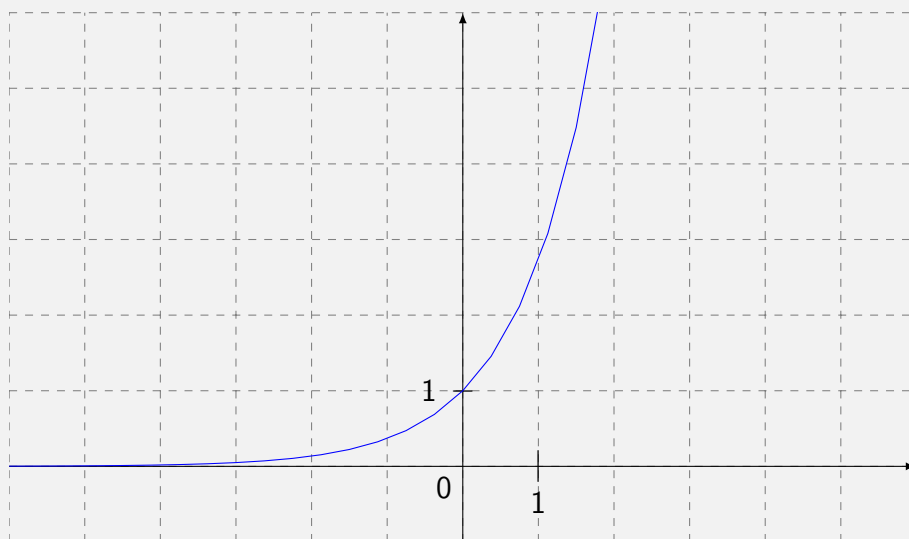
Exercice de recherche.

Soit la fonction $f : x \mapsto -x^2 + kx - 4$ ($k \in \mathbb{R}$). Déterminer les valeurs du réel k telles que la droite Δ d'équation $y = x - 3$ soit tangente à la courbe représentant f .

Fonction exponentielle

Rappels de cours

- ★ La fonction **exponentielle** $f : x \mapsto e^x$ est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
 $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$.
- ★ $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.
- ★ Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- ★ Pour tous les réels x et y , $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
- ★ Pour tout réels x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
- ★ Pour tout les réels x et y , $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
- ★ Pour tout réel x , $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$.
- ★ Pour tout réel x et tout entier n , $(e^x)^n = e^{nx}$.
- ★ La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ★ Pour tous les réels a et b , la fonction $g : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
 $g'(x) = a \times e^{ax+b}$.
- ★ $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.
- ★ $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$.
- ★ On a la représentation graphique



Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Prouver que, pour tout réel x , $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
3. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2, 5x + 1)e^x$.

1. On note f' la fonction dérivée de f .
 - a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x^2 - 0, 5x - 1, 5)e^x$.
 - b. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathcal{T}$ la tangente à C_f au point A d'abscisse 0.

Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$.

(d'après BNS)

Exercice 9

Exercice de recherche.

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

On note C_f la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.
2. La courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.
3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.

4. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
5. Existe-t-il une tangente à C_f qui passe par l'origine du repère ?

(d'après BNS)

Suites

Rappels de cours

★ Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

◆ La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

◆ La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

★ La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **géométrique** de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

On a alors,

◆ Pour tous les entiers naturels n et p , $u_n = q^{n-p}u_p$.

En particulier, $u_n = q^n u_0$.

◆ Si, $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

En particulier, $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (u_0 = 1)$

★ La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **arithmétique** de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

On a alors,

◆ Pour tous les entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.

En particulier, $u_n = u_0 + nr$.

◆ $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

En particulier, $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (u_0 = 0 \text{ et } r = 1)$

Exercice 10

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes début janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions pour l'année 2013.

Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvellent leur inscription l'année suivante et qu'il y aura également 400 nouveaux adhérents.

Pour tout entier naturel n , on peut donc modéliser le nombre d'inscrits à la médiathèque n années après 2013 par une suite numérique (a_n) définie par : $a_0 = 2500$ et $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.

1. Calculer a_1 et a_2 .

2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 2000$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

- c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
- d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leq 2010$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

(BNS)

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{4}{u_n}$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
3. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

(d'après Bac 2021 candidats libres)

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n - n + 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.

Probabilités et variables aléatoires

Rappels de cours

- ★ Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité p avec $p(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** , notée $p_A(B)$, vaut

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

- ★ Si A et B sont deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité p avec $p(A) \neq 0$ alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- ★ Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité p avec $p(A) \neq 0$. Alors,

$$p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$$

- ★ Deux événements A et B d'un univers Ω , muni d'une probabilité p , sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- ★ L'ensemble d'événements $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une **partition** de l'univers Ω si et seulement si pour tous les événements A_i et A_j ($i \neq j$), $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

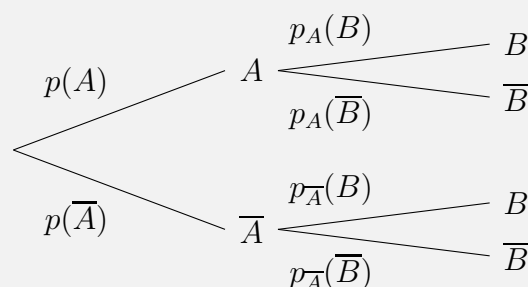
- ★ Soit Ω un univers muni d'une probabilité p .

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de Ω alors, pour tout événement B de Ω , on a

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$

- ★ Si $\{A, \overline{A}\}$ et $\{B, \overline{B}\}$ sont deux partitions d'un univers Ω , muni d'une probabilité p , telles que la probabilité de chacun des événements soit non nulle.

On construit alors un arbre de probabilités de la façon suivante



Sur un arbre de probabilités, les probabilités conditionnelles sont les probabilités qui apparaissent à partir "second niveau" des branches.

- ◆ La somme des probabilités des chemins issus d'un même événement doit être égale à 1
- ◆ Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités qui sont sur les branches de ce chemin.
- ◆ Pour calculer la probabilité d'un événement, on additionne les probabilités de tous les chemins constituant cet événement.

Rappels de cours

- ★ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω .
 X est une **variable aléatoire** associée à l'expérience si, pour tout événement A de Ω , elle associe un nombre.
On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X .

- ★ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire associée à cette expérience.
La **loi de probabilité** de X est le calcul des probabilités des événements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_p\}$ lorsque $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les valeurs de $X(\Omega)$.

Il est courant de présenter ces valeurs dans un tableau.

- ★ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω , X une variable aléatoire associée prenant les valeurs $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.
Alors, on appelle **espérance** de X , noté $E(X)$, le réel :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_p \times p(X = x_p)$$

- ★ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω , X une variable aléatoire associée prenant les valeurs $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. On note $E(X)$ son espérance.
Alors, on appelle **variance** de X , noté $V(X)$, le réel :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times p(X = x_1) + \dots + (x_p - E(X))^2 \times p(X = x_p)$$

L'**écart-type** est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 13

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millième.
Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

- 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
 - parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse ;
 - par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.
1. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note :
 - E l'événement "le smartphone a un écran cassé".
 - B l'événement "le smartphone a une batterie défectueuse".
 - a. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.
 - b. Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.
 - c. Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?
 2. L'entreprise dépense 20 € pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère. Si l'écran est cassé, elle dépense 30 € supplémentaires, et si la batterie est défectueuse, elle dépense

40 € supplémentaires.

On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi au hasard dans le stock.

- a. Recopier et compléter copie (aucune justification n'est attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	20	50	...	...
$P(X = x_i)$	0,44	...	...	...

- b. L'entreprise doit réparer et reconditionner 500 smartphones.
Combien doit-elle s'attendre à dépenser ?

(BNS)

Exercice 14

Dans tout l'exercice, on notera $P(E)$ la probabilité d'un événement E .

La répartition des 150 adhérents d'un club de sport est donnée dans le tableau ci-dessous :

Âge	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans
Nombre de filles	17	39	22	10
Nombre de garçons	13	36	8	5
Total	30	75	30	15

On choisit un adhérent au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi ait 17 ans ?
2. L'adhérent choisi a 18 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On note X la variable aléatoire donnant l'âge de l'adhérent choisi.

3. Déterminer la loi de probabilité de X .
4. Calculer $P(X \geq 16)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

(BNS)

Exercice 15

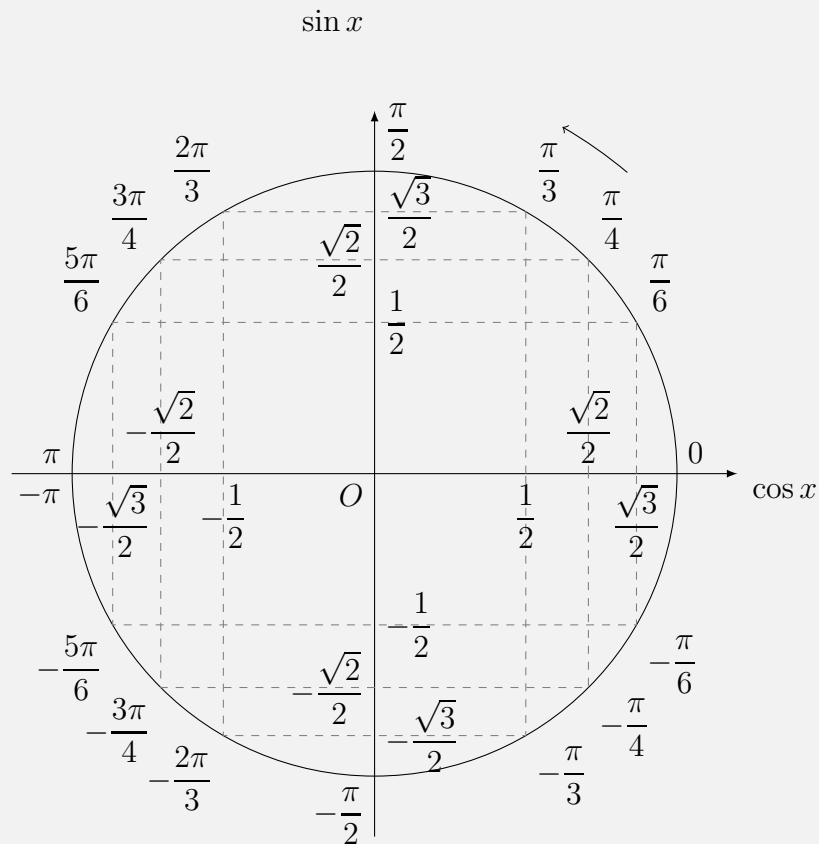
Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

1. Justifier qu'alors : $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
2. Démontrer que si A et B sont deux événements indépendants d'un univers Ω alors $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

Trigonométrie *

Rappels de cours

- ★ Dans un repère orthonormé du plan, on a le cercle trigonométrique



- ★ Pour tout réel x ,

- ◆ $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- ◆ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- ◆ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- ◆ $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

- ★ Soit $a \in [-1; 1]$.

- ◆ Si x_0 est tel que $\cos x_0 = a$ alors,

$$\cos x = a \quad \text{si et seulement si} \quad x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -x_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- ◆ Si x_0 est tel que $\sin x_0 = a$ alors,

$$\sin x = a \quad \text{si et seulement si} \quad x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi - x_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- ★ La fonction $\cos : x \mapsto \cos x$ est **paire** ($\cos(-x) = \cos x$) et **périodique** de période 2π ($\cos(x + 2\pi) = \cos x$).

- ★ La fonction $\sin : x \mapsto \sin x$ est **impaire** ($\sin(-x) = -\sin x$) et **périodique** de période 2π ($\sin(x + 2\pi) = \sin x$).

Exercice 16

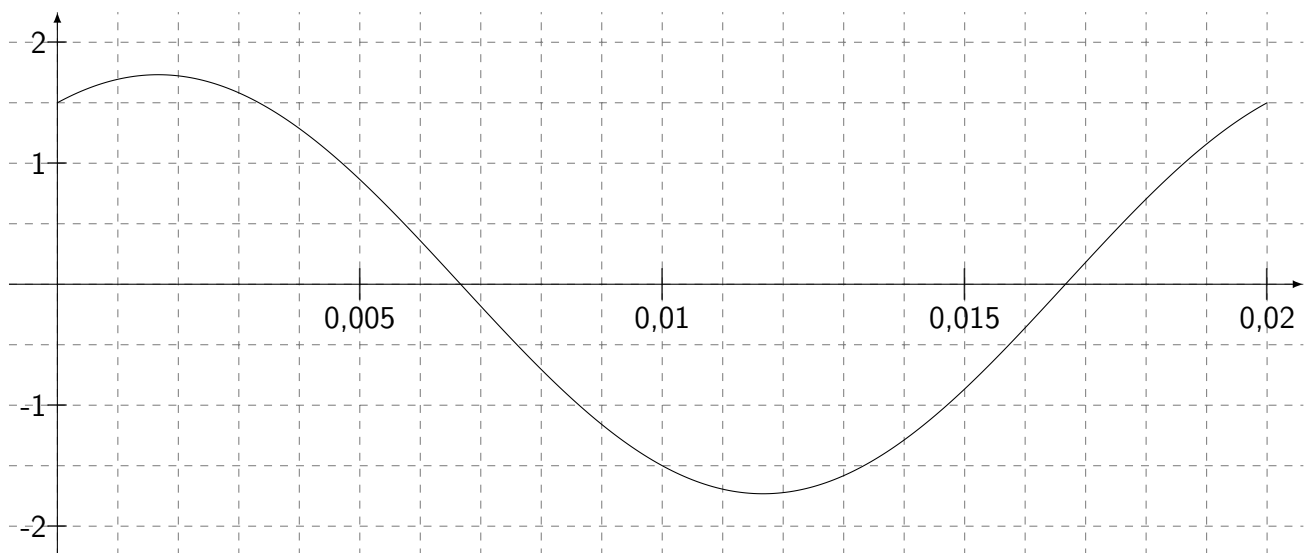
On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.

Le temps t est exprimé en seconde. La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geq 0$ par :

$$u(t) = \sqrt{3} \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

La diode est non passante si $u(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. La diode est-elle passante à l'instant $t = 0$?
2. Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.
3. On admet que $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geq 0$. En déduire une propriété de la fonction u .
4. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction u sur l'intervalle $[0; 0,02]$:



On cherche à savoir au bout de combien de temps la diode devient non passante pour la première fois.

- a. Conjecturer la solution du problème à l'aide du graphique.
- b. Calculer $u(0,005)$ et conclure.

(BNS).

Exercice 17

1. Vérifier que $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$.
3. En déduire la résolution dans $[-\pi; \pi]$ de l'équation $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\cos x - \sqrt{3} = 0$

Exercice 18

Exercice de recherche.

Montrer que, pour tout réel x , $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$

Calcul vectoriel et produit scalaire *

Rappels de cours

★ **Relation de Chasles** Pour tous points A, B, C , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

★ Si, dans un repère du plan, points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

★ Si, dans un repère **orthonormé** du plan, points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

★ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls** et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le **réel**

$$\blacklozenge \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \widehat{BAC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\blacklozenge \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

◆ Si, dans un repère orthonormé du plan, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

◆ Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AH \times AB & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AH \times AB & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

◆ Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

◆ Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

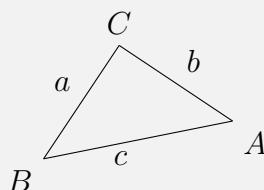
◆ Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et les réels k, k' , $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (kk') \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

◆ Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

◆ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

◆ **Théorème d'Al-Kashi**

Soit ABC un triangle avec $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.



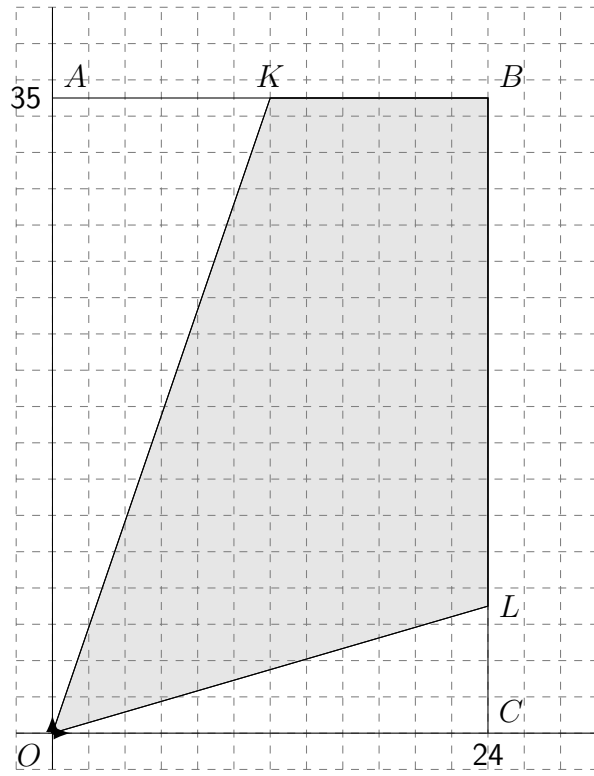
$$\text{Alors, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}.$$

Exercice 19

Le rectangle $OABC$ ci-dessous représente une place touristique vue de dessus.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OC} = 24\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA} = 35\vec{j}$.

Afin d'éclairer le plus grand nombre de monuments, on place au point O , un projecteur lumineux qui permet d'éclairer la partie du plan délimitée par les segments de droite $[OK]$ et $[OL]$ tels que K est le milieu de $[AB]$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$.



- Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points A, B, C, K et L .
- Un visiteur affirme : " Moins de 70 % de la surface de la place est éclairée ". Cette affirmation est-elle exacte ?
- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OL}$.
 - Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL}$ est égal à 533.
 - En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{KOL}$.

(BNS)

Exercice 20

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points $A(2; -1)$, $B(0; 3)$ et $C(3; 1)$.

- Vérifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.
 - Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$, on donnera les valeurs exactes.
 - Vérifier que $\cos \widehat{BAC} = 0,6$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.
- Soit H le pied de la hauteur issue de C .
 - Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
 - On admet que le point H a ses coordonnées de la forme $H(x; 3 - 2x)$. Calculer la valeur de x et en déduire les coordonnées du point H .

(d'après BNS)

Exercice 21

Exercice de recherche.

Soient A, B deux points distincts.

1. Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Droites et cercles *

Rappels de cours

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- ★ On appelle **équation de droite** (ou plus généralement équation de courbe) toute équation d'inconnues x et y dont l'ensemble des solutions est exactement l'ensemble des coordonnées $(x; y)$ des points de la droite (ou de la courbe).

- ★ Pour toute droite Δ du plan, il existe trois réels a, b et c ($(a, b) \neq (0, 0)$) tels que

$$M(x; y) \in \Delta \text{ si et seulement si } ax + by + c = 0.$$

L'équation $ax + by + c = 0$ est alors une **équation cartésienne** de la droite Δ .

- ★ Un vecteur *non nul* $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite Δ si et seulement si pour tous les points A et B appartenant à Δ , $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

- ★ Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \det(\vec{u}, \vec{v}) = ab' - a'b = 0.$$

- ★ Si Δ est une droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et admettant le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur directeur** alors

$$M(x; y) \in \Delta \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ sont } \mathbf{colinéaires}$$

$$\text{ce qui équivaut à } \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x - x_A) \times b - a(y - y_A) = 0.$$

- ★ Les droites $\Delta : ax + by + c = 0$ et $\Delta' : a'x + b'y + c' = 0$ sont **parallèles** si et seulement si les couples (a, b) et (a', b') sont proportionnels.

- ★ Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite Δ si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de Δ .

- ★ Si Δ est une droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et admettant le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur normal** alors

$$M(x; y) \in \Delta \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ sont } \mathbf{orthogonaux}$$

$$\text{ce qui équivaut à } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (x - x_A) \times a + b(y - y_A) = 0.$$

- ★ Si la droite Δ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à Δ .

- ★ Soit le point $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$. Soit R un réel positif.
Le cercle de centre Ω et de rayon R admet pour équation

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Exercice 22

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1; 3)$, $B(5; 0)$ et $C(9; 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.
4. Vérifier que le point $E(3; 1)$ est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (AB) .
5. Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
6. On donne $AE = 2\sqrt{5}$ et $EC = 2\sqrt{10}$.

Calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{AEC}$.

(d'après BNS)

Exercice 23

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2; 5)$ et de rayon 5.

1. Montrer qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 - 4x - 10y = -4$.
2. Vérifier que le point $B(5; 9)$ appartient à ce cercle.
3. On rappelle qu'une droite tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon du cercle passant par ce point.
Déterminer une équation de la tangente au cercle au point B .
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.

(d'après BNS)

Exercice 24

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(-3; 1)$, $B(3; 5)$ et $C(7; 1)$ dans ce repère.

Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon de ce cercle.

On rappelle que le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

1. Placer les points A , B et C dans le plan puis construire le cercle circonscrit au triangle ABC .
2. Vérifier que la droite Δ d'équation $3x + 2y - 6 = 0$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
3. Déterminer les coordonnées du point B' , milieu du segment $[AC]$.
4. Déterminer les coordonnées du point I , centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
5. Calculer une valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .
6. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .

(d'après BNS)