RÉVISIONS

Chaque chapitre débute par un rappel succinct des résultats du cours et contient deux ou trois exercices.
Plusieurs de ces exercices sont issus de la BNS (Banque Nationale de Sujets).
Les chapitres marqués d'un astérisque sont les chapitres qui ne seront pas utilisés en mathématiques complémentaires.
Un corrigé sera proposé dans quelques jours.
Si vous avez des questions ou des demandes d'explications, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse e-mail suivante : **mathemagicienne@mathsaulma.fr**

BONNES VACANCES !!

Second degré

Rappels de cours

Soient a, b et c trois réels, a non nul.

- ⋆ La fonction **polynôme du second degré** $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines.
- ⋆ Soit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
  - ◆ Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes
    $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
    On a alors,
    $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
  - ◆ Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ a une racine réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
    On a alors,
    $$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$
  - ◆ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ admet deux racines complexes.
- ⋆ On appelle **forme canonique** d'une fonction polynôme de degré 2 son écriture sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$.
  On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.
- ⋆ On a le tableau de variations
  - ◆ Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de $x \longmapsto ax^2 + bx + c$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

  - ◆ Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de $x \longmapsto ax^2 + bx + c$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

- ⋆ La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** dont l'axe de symétrie a pour équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exercice 1

On considère la fonction $P : x \longmapsto -2x^2 + 2x + 24$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Déterminer les racines de P.
   b. En déduire une factorisation de $P(x)$.
   c. Résoudre l'inéquation $2x^2 - 13 < 2x + 11$.
2. **a.** Déterminer la forme canonique de $P(x)$.
   b. En déduire le tableau de variation de P.
   c. Pour quelle valeur de x, $P(x)$ est-il maximal ? Quelle est la valeur de ce maximum ?

1. **a.** Pour déterminer les racines de P, on résout l'équation $-2x^2+2x+24 = 0$ qui est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 24 = 4 + 192 = 196 > 0$.
   P admet donc deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{196}}{2 \times (-2)} = \frac{-2 - 14}{-4} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{196}}{2 \times (-2)} = \frac{12}{-4} = -3$$

   b. D'après la propriété du cours, on en déduit que, pour tout réel x,

$$P(x) = -2(x-4)(x-(-3)) = -2(x-4)(x+3)$$

   c. L'inéquation $2x^2 - 13 < 2x + 11$ équivaut à $0 < 2x + 11 - 2x^2 + 13$ qui s'écrit aussi

   $0 < -2x^2 + 2x + 24$ ou encore $0 < P(x)$.

   P étant une fonction polynôme du second degré, on sait que $P(x)$ est du signe de $a = -2 < 0$ partout sauf entre ses racines. On a donc le tableau de signes

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit que $2x^2 - 13 < 2x + 11$ si et seulement si $x \in]-3; 4[$.

2. **a.** Pour tout réel x,

$$P(x) = -2x^2 + 2x + 24 = -2(x^2 - x) + 24 = -2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 24$$

$$P(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 24 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{2} = -2(x - 0,5)^2 + 24,5$$

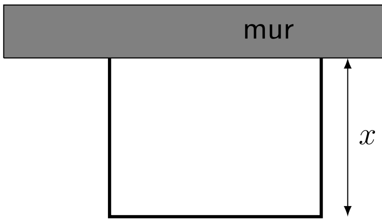
   b. $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -2 < 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{49}{2}$ donc, d'après la propriété du cours, on a le tableau de variations

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
Variations de P		$\nearrow$	$24,5$	$\searrow$	

   c. D'après le tableau de variations, on conclut que P est maximal lorsque $x = 0,5$ et que ce maximum vaut $24,5$.

Exercice 2

Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur de sa ferme afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos.
Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale.
On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.



On appelle A la fonction qui à un nombre x associe $A(x)$ l'aire de l'enclos. La fonction A est ainsi définie sur l'intervalle $[0;14]$.

1. **a.** Vérifier que l'aire $A(x) = -2x^2 + 28x$
   b. Montrer que la forme canonique de $A(x)$ est $-2(x-7)^2 + 98$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction A.
3. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Donner la valeur de cette aire.

(d'après BNS)

1. **a.** Deux côtés de l'enclos mesurent x et la longueur totale des trois côtés est de 28 m donc le troisième côté grillagé mesure $28 - 2x$.
   Ainsi, l'enclos est un rectangle ayant pour côtés x et $28 - 2x$ donc son aire vaut
   $$\mathcal{A}(x) = x \times (28 - 2x) = 28x - 2x^2 = -2x^2 + 28x$$
   b. Pour tout réel $x \in [0;14]$,
   $$\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 28x = -2(x^2 - 14x) = -2[(x-7)^2 - 49] = -2(x-7)^2 + 98$$
2. $\mathcal{A}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -2 < 0$, $\alpha = 7$ et $\beta = 98$ donc, d'après la propriété du cours, on a le tableau de variations

x	0		7		14
Variations de $\mathcal{A}$			98		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

3. D'après le tableau de variations, on conclut que l'aire de l'enclos est maximale lorsque $x = 7$ et vaut alors 98 m^2.

Exercice 3

Exercice de recherche.

Soit m un réel.
Déterminer les valeurs de m telles que, pour tout réel x, on ait
$$\frac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$$

L'inégalité $\dfrac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ équivaut à $\dfrac{2x^2 + 2mx + m}{4x^2 + 6x + 3} - 1 < 0$ ou encore

$\dfrac{(2x^2+2mx+m)-(4x^2+6x+3)}{4x^2+6x+3}<0$ ou $\dfrac{-2x^2+(2m-6)x+m-3}{4x^2+6x+3}<0$.

On étudie le signe du trinôme $4x^2+6x+3$ qui a pour discriminant $\Delta=6^2-4\times4\times3=-12<0$.
Le trinôme $4x^2+6x+3$ est donc toujours du signe de $4>0$.
On en déduit donc que le quotient $\dfrac{-2x^2+(2m-6)x+m-3}{4x^2+6x+3}$ est du même signe que $-2x^2+(2m-6)x+m-3$.
Donc, pour que l'inégalité $\dfrac{2x^2+2mx+m}{4x^2+6x+3}<1$ soit vérifiée pour tout réel x, il faut que $-2x^2+(2m-6)x+m-3$ soit toujours strictement négatif.
Il faut donc que m vérifie la condition

$$\Delta=(2m-6)^2-4(-2)(m-3)<0$$

Or, $(2m-6)^2-4(-2)(m-3)=(2(m-3))^2+8(m-3)=4(m-3)^2+8(m-3)=4(m-3)[(m-3)+2]=4(m-3)(m-1)$.
On a donc le tableau de signe

m	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $(m-1)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Signe de $4(m-3)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Signe de Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'inégalité $\dfrac{2x^2+2mx+m}{4x^2+6x+3}<1$ est vérifiée pour tout réel x lorsque $m\in]1;3[$.

Dérivation

Rappels de cours

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, $a \in I$ et f' la fonction dérivée de f sur I.

- ⋆ Le nombre dérivé de la fonction f en a, $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse a.
- ⋆ L'équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- ⋆ Le coefficient directeur d'une droite se détermine graphiquement en faisant le quotient

$$\text{coefficient directeur} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

- ⋆ Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est **croissante** sur I.
- ⋆ Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est **décroissante** sur I.
- ⋆ On étudie donc le **signe de la dérivée** pour connaître le **sens de variation de la fonction**.
- ⋆ Pour les fonctions usuelles, on a les dérivées

Fonction	Dérivée	Intervalle
$x \longmapsto k$, $k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

- ⋆ Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Condition
$u+v$	$u'+v'$	
$k \times u$, $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$	
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$x \longmapsto u(ax+b)$	$x \longmapsto au'(ax+b)$	

Exercice 4

Une entreprise produit du tissu.

Le coût total de production (en €) de production de l'entreprise est modélisé par la fonction $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$ où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?
2. Montrer que $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$
3. Donner une expression de $B'(x)$ où B' est la fonction dérivée de la fonction B.
4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0; 10]$ puis le tableau de variations de la fonction B.
5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

(BNS)

1. Le coût de production de 3 kilomètres de tissu vaut $C(3) = 15\times 3^3 - 120\times 3^2 + 500\times 3 + 750 = 1\ 575$ euros.
   Chaque kilomètre de tissu étant vendu 680 € donc la vente de 3 kilomètres de tissu rapporte $680 \times 3 = 2\ 040$ euros.
   Le résultat de l'entreprise est alors de $2\ 040 - 1\ 575 = 465$ euros.

2. Lorsque x kilomètres de tissu sont vendu, la recette est de $680x$ euros donc le résultat de l'entreprise vaut

$$B(x) = 680x - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750$$

$$B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$$

3. Pour tout $x \in [0; 10]$, on a

$$B'(x) = -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$$

4. $-45x^2 + 240x + 180$ est une expression du second degré de discriminant $\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90\ 000 > 0$. $-45x^2 + 240x + 180$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-240 - \sqrt{90\ 000}}{2 \times (-45)} = \frac{-240 - 300}{-90} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-240 + \sqrt{90\ 000}}{2 \times (-45)} = \frac{-240 + 300}{-90} = -\frac{2}{3} \notin [0; 10]$$

$-45x^2 + 240x + 180$ est du signe de $-45 < 0$ partout sauf entre ses racines donc, on a le tableau de signes

x	0		6		10
Signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de la fonction B

x	0		6		10
Variations de B	-750	$\nearrow$	$1\ 410$	$\searrow$	$-1\ 950$

5. D'après le tableau de variations de la fonction B, on conclut que le résultat de l'entreprise est maximal lorsque 6 kilomètres de tissu sont produit par l'entreprise. Le résultat réalisé est alors de $1\ 410$ euros.

Exercice 5

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1;5]$ par

$$f(x) = \frac{0,5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}$$

1. Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.
2. On admet que de f est dérivable sur $[1;5]$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel $x \in [1;5]$
   $$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$$
3. Montrer que, pour tout réel x, $x^3 - 3x^2 - 16 = (x-4)(x^2+x+4)$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[1;5]$.
5. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

(BNS)

1. On calcule
   $$f(2) = \frac{0,5 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 16}{2} = \frac{4 - 12 + 2 + 16}{2} = 5$$
   Le coût moyen de production est donc de 5 milliers d'euros.
2. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + x + 16$ et $v(x) = x$.

   On sait qu'alors $u'(x) = 0,5 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 1 = 1,5x^2 - 6x + 1$, $v'(x) = 1$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc, pour tout $x \in [1;5]$,
   $$f'(x) = \frac{(1,5x^2 - 6x + 1) \times x - (0,5x^3 - 3x^2 + x + 16) \times 1}{x^2}$$
   $$f'(x) = \frac{1,5x^3 - 6x^2 + x - 0,5x^3 + 3x^2 - x - 16}{x^2}$$
   $$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$$
3. Pour tout réel x, on a
   $$(x-4)(x^2+x+4) = x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16 = x^3 - 3x^2 - 16$$
4. Pour tout réel $x \in [1;5]$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $x^3 - 3x^2 - 16 = (x-4)(x^2+x+4)$. x^2+x+4 est une expression du second degré de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$ donc x^2+x+4 est toujours du signe de $a = 1 > 0$.

   On en déduit que $f'(x)$ est du même signe que $x - 4$. On a donc le tableau de variations

x	1		4		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$14,5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$1,7$

5. D'après le tableau de variations, on conclut que le coût moyen de production est minimal lorsque 4 milliers de pièces sont fabriquées. Ce coût s'élève alors à 1 millier d'euros.

Exercice 6

Exercice de recherche.

Soit la fonction $f : x \longmapsto -x^2 + kx - 4$ ($k \in \mathbb{R}$). Déterminer les valeurs du réel k telles que la droite Δ d'équation $y = x - 3$ soit tangente à la courbe représentant f.

Soit a l'abscisse du point en lequel la droite Δ est tangente à la courbe représentant f.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est donc égal au coefficient directeur de Δ qui vaut 1.
Or, $f'(x) = -2x + k$ donc on en déduit que $-2a + k = 1$ donc que $k = 1 + 2a$.
La tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Comme on sait que $f'(a) = 1$ et $y = x - 3$, on en déduit que

$$y = x - a + f(a) = x - 3$$

donc, $-a + f(a) = -3$ ce qui s'écrit aussi $-a - a^2 + ka - 4 = -3$ ou encore $-a - a^2 + ka - 1 = 0$.

On a établi que $k = 1 + 2a$ donc, l'équation précédente s'écrit aussi $-a - a^2 + (2a + 1)a - 1 = 0$ ou encore $-a - a^2 + 2a^2 + a - 1 = 0$ c'est-à-dire $a^2 - 1 = 0$.

On en déduit que $a = 1$ ou $a = -1$.

- Lorsque $a = 1$, on a $k = 1 + 2 \times 1 = 3$.
- Lorsque $a = -1$, on a $k = 1 + 2 \times (-1) = -1$.

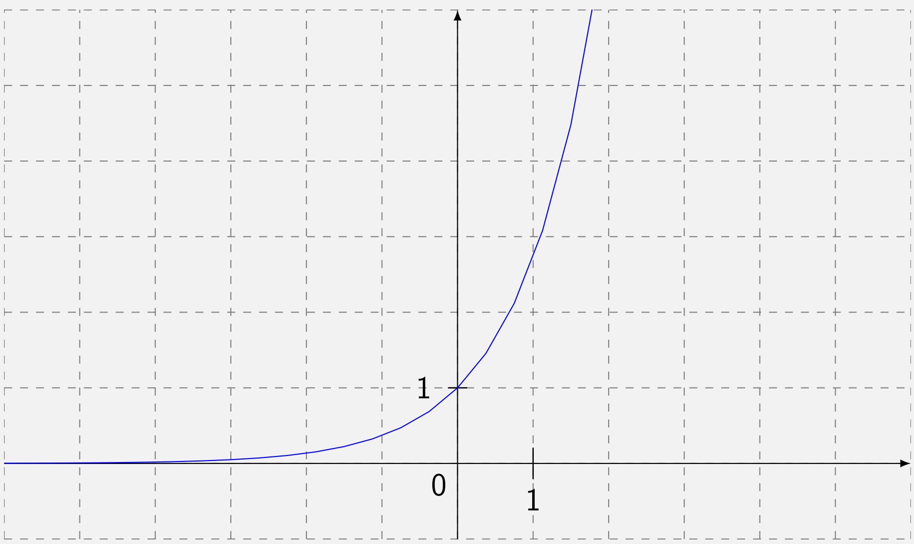
Les valeurs possibles pour k sont donc 3, Δ est alors la tangente au point d'abscisse 1, ou -1, Δ étant alors la tangente au point d'abscisse -1.

Fonction exponentielle

Rappels de cours

- ⋆ La fonction **exponentielle** $f : x \longmapsto e^x$ est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
  $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$.
- ⋆ $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.
- ⋆ Pour tout réel x, $e^x > 0$.
- ⋆ Pour tous les réels x et y, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
- ⋆ Pour tout réels x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- ⋆ Pour tout les réels x et y, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- ⋆ Pour tout réel x, $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$.
- ⋆ Pour tout réel x et tout entier n, $(e^x)^n = e^{nx}$
- ⋆ La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ Pour tous les réels a et b, la fonction $g : x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $g'(x) = a \times e^{ax+b}$.
- ⋆ $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$
- ⋆ $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$.
- ⋆ On a la représentation graphique



Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

1. Calculer $g'(x)$.

2. Prouver que, pour tout réel x, $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

3. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

1. Pour tout réel x, on a

$$g'(x) = 2 \times e^{2x} - e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$$

2. Pour tout réel x, on a

$$(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2(e^x)^2 + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x)$$

3. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $e^x - 1$.

Or, $e^x - 1 \geqslant 0$ si et seulement si $e^x \geqslant 1$ ce qui s'écrit aussi à $e^x \geqslant e^0$ ce qui équivaut à $x \geqslant 0$.

On a donc le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de la fonction g est donc 0. La fonction g est donc toujours positive ou nulle.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2,5x + 1)e^x$.

1. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Monter que, pour tout réel x, $f'(x) = (x^2 - 0,5x - 1,5)e^x$.

b. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$.

(d'après BNS)

1. **a.** $f = u \times v$ avec $u(x) = (x^2 - 2,5x + 1)$ et $v(x) = e^x$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et $f' = u'v + uv'$.
Or, $u'(x) = 2x - 2,5$ et $v'(x) = e^x$ donc, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = (2x - 2,5)e^x + (x^2 - 2,5x + 1)e^x = (2x - 2,5 + x^2 - 2,5x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 - 0,5x - 1,5)e^x$$

b. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $x^2 - 0,5x - 1,5$.
$x^2 - 0,5x - 1,5$ est une expression du second degré de discriminant $\Delta = (-0,5)^2 - 4 \times 1 \times (-1,5) = 6,25 > 0$ qui admet donc deux racines réelles

$$x_1 = \frac{0,5 - \sqrt{6,25}}{2 \times 1} = \frac{0,5 - 2,5}{2} = -1 \quad \text{et} x_2 = \frac{0,5 + \sqrt{6,25}}{2 \times 1} = \frac{0,5 + 2,5}{2} = \frac{3}{2}$$

$x^2 - 0,5x - 1,5$ est du signe de $a = 1 > 0$ partout sauf entre ses racines donc on a le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$4,5e^{-1}$	$\searrow$	$-0,5e^{1,5}$	$\nearrow$	

2. D'après la propriété du cours, une équation de la droite $\mathcal{T}$ est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

avec $f'(0) = -1,5e^0 = -1,5$ et $f(0) = 1e^0 = 1$ donc la tangente $\mathcal{T}$ a pour équation $y = -1,5x+1$

Exercice 9
Exercice de recherche.

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.

On note C_f la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.

2. La courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$.

4. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

5. Existe-t-il une tangente à C_f qui passe par l'origine du repère ?

(d'après BNS)

1. A étant le point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées, on sait que l'abscisse du point A est 0 et donc que ses coordonnées sont $(0; f(0))$.

Or, $f(0) = \dfrac{e^0}{1+0} = 1$ donc le point A a pour coordonnées $(0; 1)$.

2. La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x si et seulement si $f(x) = 0$.

Or, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\dfrac{e^x}{1+x} = 0$ et comme, pour tout réel x, $e^x \neq 0$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
On conclut que la courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

3. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x$.

Comme $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$, on sait que f est dérivable, comme quotient de fonctions dérivables, et que $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a donc

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x + xe^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

4. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $e^x > 0$, $(1+x)^2 > 0$ et $x \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.
La fonction f est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

5. D'après la propriété du cours, la tangente à C_f au point d'abscisse a admet pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$$

Une telle tangente passe par l'origine du repère si et seulement si $0 = -af'(a) + f(a)$ ce qui équivaut à $0 = -a\dfrac{ae^a}{(1+a)^2} + \dfrac{e^a}{(1+a)}$ ce qui équivaut à $0 = \dfrac{-a^2e^a + e^a(1+a)}{(1+a)^2}$ ou encore $\dfrac{e^a(-a^2 + a + 1)}{(1+a)^2} = 0$.

Comme tout réel a, $e^a > 0$, l'équation $e^a(-a^2 + a + 1) = 0$ équivaut à $-a^2 + a + 1 = 0$ qui est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0$.
Cette équation admet donc deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin [0; +\infty[$$

Ainsi, on en déduit qu'il existe une tangente à C_f passant par l'origine du repère. Il s'agit de la tangente à C_f au point d'abscisse $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Suites

Rappels de cours

⋆ Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n,

  $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

⋆ La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **géométrique** de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

On a alors,

- Pour tous les entier naturels n et p, $u_n = q^{n-p}u_p$.

  En particulier, $u_n = q^n u_0$.
- Si, $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

  En particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (u_0 = 1)$

⋆ La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **arithmétique** de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

On a alors,

- Pour tous les entier naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

  En particulier, $u_n = u_0 + nr$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

  En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (u_0 = 0 \text{ et } r = 1)$

Exercice 10
La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes début janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions pour l'année 2013.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvellent leur inscription l'année suivante et qu'il y aura également 400 nouveaux adhérents.

Pour tout entier naturel n, on peut donc modéliser le nombre d'inscrits à la médiathèque n années après 2013 par une suite numérique (a_n) définie par : $a_0 = 2500$ et $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.

1. Calculer a_1 et a_2.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leqslant 2010$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

(BNS)

1. Par définition, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$ donc

- $a_1 = 0,8 \times a_0 + 400 = 0,8 \times 2500 + 400 = 2400$
- $a_2 = 0,8 \times a_1 + 400 = 0,8 \times 2400 + 400 = 2320$

2. **a.** Par définition de la suite (v_n), on a, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 2000 = 0,8a_n + 400 - 2000 = 0,8a_n - 1600$$

$$v_{n+1} = 0,8a_n - 0,8 \times 2000 = 0,8(a_n - 2000) = 0,8v_n$$

La suite (v_n) est donc bien géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500$.

b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 500$ donc, pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,8^n$$

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$ donc $a_n = v_n + 2000$ et comme $v_n = 500 \times 0,8^n$,

on en déduit que $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.

d. Avec la calculatrice, on trouve que $a_{17} > 2010$ et $a_{18} < 2010$ donc le plus petit entier naturel tel que $a_n \leqslant 2010$ est $n = 18$.
Cela signifie que c'est en $2013 + 18 = 2031$ que la médiathèque comptera moins de 2010 inscriptions.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{4}{u_n}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

(d'après Bac 2021 candidats libres)

1. Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2}{u_n + 4}$$

Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ donc $-u_n^2 < 0$ et $u_n + 4 > 0$ donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

2. a. Par définition de la suite (v_n), on a, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = \frac{4}{\dfrac{4u_n}{u_n+4}} = 4 \times \frac{u_n+4}{4u_n} = \frac{u_n+4}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{4}{u_n} = 1 + v_n$$

La suite (v_n) est donc bien arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{4}{u_0} = \dfrac{4}{1} = 4$.

b. (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 4$ donc, pour tout entier naturel n, on a

$$v_n = v_0 + nr = 4 + n$$

3. Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{4}{u_n}$ donc $u_n = \dfrac{4}{v_n} = \dfrac{4}{4+n}$.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - n + 1.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

1. Par définition, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ donc
   - $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 - 0 + 3 = 3$
   - $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3 - 2 + 3 = 10$

2. a. Par définition de la suite (v_n), on a, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - n + 1 + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 - 1 = 3u_n - 3n + 3$$

$$v_{n+1} = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 3$ et premier terme
$v_0 = 3u_0 - 0 + 1 = 3 \times 0 - 0 + 1 = 1$.

b. (v_n) est géométrique de raison $a = 3$ et de premier terme $v_0 = 1$ donc, pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - n + 1$ donc $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

Probabilités et variables aléatoires

Rappels de cours

⋆ Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité p avec $p(A) \neq 0$.
La **probabilité de B sachant A** , notée $p_A(B)$, vaut

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

⋆ Si A et B sont deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité p avec $p(A) \neq 0$ alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

⋆ Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité p avec $p(A) \neq 0$.
Alors,

$$p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$$

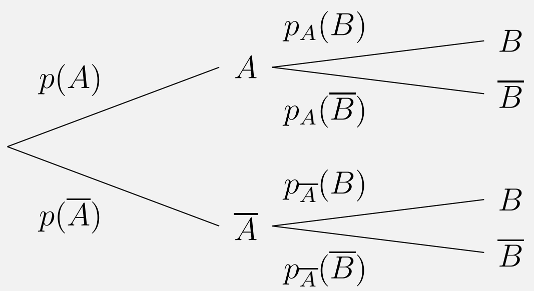
⋆ Deux événements A et B d'un univers Ω, muni d'une probabilité p, sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

⋆ L'ensemble d'événements $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une **partition** de l'univers Ω si et seulement si pour tous les événements A_i et A_j $(i \neq j)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

⋆ Soit Ω un univers muni d'une probabilité p.
Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω alors, pour tout événement B de Ω, on a

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n)$$

⋆ Si $\{A, \overline{A}\}$ et $\{B, \overline{B}\}$ sont deux partitions d'un univers Ω, muni d'une probabilité p, telles que la probabilité de chacun des événements soit non nulle.
On construit alors un arbre de probabilités de la façon suivante



Sur un arbre de probabilités, les probabilités conditionnelles sont les probabilités qui apparaissent à partir *"second niveau"* des branches.

- La somme des probabilités des chemins issus d'un même événement doit être égale à
- Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités qui sont sur les branches de ce chemin.
- Pour calculer la probabilité d'une événement, on additionne les probabilités de tous les chemins constituant cet événement.

Rappels de cours

* $\star$ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
  X est une **variable aléatoire** associée à l'expérience si, pour tout événement A de Ω, elle associe un nombre.
  On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

* $\star$ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire associée à cette expérience.
  La **loi de probabilité** de X est le calcul des probabilités des événements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ...,$\{X = x_p\}$ lorsque $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les valeurs de $X(\Omega)$.

  Il est courant de présenter ces valeurs dans un tableau.

* $\star$ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω, X une variable aléatoire associée prenant les valeurs $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$.
  Alors, on appelle **espérance** de X, noté $E(X)$, le réel :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + ... + x_p \times p(X = x_p)$$

* $\star$ On considère une expérience aléatoire d'univers Ω, X une variable aléatoire associée prenant les valeurs $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. On note $E(X)$ son espérance.
  Alors, on appelle **variance** de X, noté $V(X)$, le réel :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times p(X = x_1) + ... + (x_p - E(X))^2 \times p(X = x_p)$$

  L'**écart-type** est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 13
Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millième.
Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

* 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
* parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse ;
* par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

1. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note :

* E l'événement *"le smartphone a un écran cassé"*.
* B l'événement *"le smartphone a une batterie défectueuse"*.

a. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.

c. Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?

2. L'entreprise dépense 20 € pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère. Si l'écran est cassé, elle dépense 30 € supplémentaires, et si la batterie est défectueuse, elle dépense

40 € supplémentaires.
On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi au hasard dans le stock.

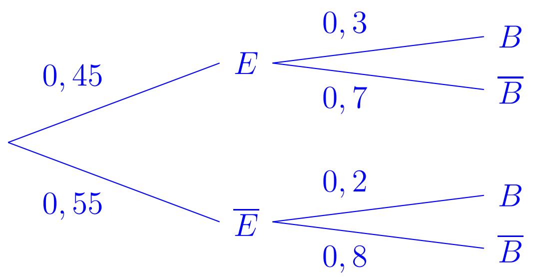
a. Recopier et compléter copie (aucune justification n'est attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	20	50	...	...
$P(X = x_i)$	0,44	...	...	...

b. L'entreprise doit réparer et reconditionner 500 smartphones.
Combien doit-elle s'attendre à dépenser ?

(BNS)

1. **a.** On a l'arbre



b. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(B) = P(E \cap B) + P(\overline{E} \cap B)$$

$$P(B) = P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B)$$

$$P(B) = 0,45 \times 0,3 + 0,55 \times 0,2 = 0,135 + 0,11 = 0,245$$

c. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{0,135}{0,245} = \frac{27}{49} \approx 0,551$$

2. **a.** Les coûts de réparation et de conditionnement s'élèvent à 20€ (smartphone sans écran cassé ni batterie défectueuse) ou 50€ (smartphone avec écran cassé sans problème de batterie) ou 60€ (smarthopne sans écran cassé avec batterie défectueuse) ou 90€ (smartphone avec écran cassé et batterie défectueuse).
On a donc le tableau

x_i	20	50	60	90
$P(X = x_i)$	0,44	0,315	0,11	0,135

b. On calcule l'espérance de la variable aléatoire X,

$$E(X) = 20 \times P(X = 20) + 50 \times P(X = 50) + 60 \times P(X = 60) + 90 \times P(X = 90)$$

$$E(X) = 20 \times 0,44 + 50 \times 0,315 + 60 \times 0,11 + 90 \times 0,135 = 43,3$$

En moyenne, le coût de réparation et conditionnement d'un smartphone est donc de 43,3€.
Pour 500 smartphone, l'entreprise doit donc s'attendre à dépenser $43,3 \times 500 = 21\ 650$€.

Exercice 14
Dans tout l'exercice, on notera $P(E)$ la probabilité d'un événement E.

La répartition des 150 adhérents d'un club de sport est donnée dans le tableau ci- dessous :

Âge	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans
Nombre de filles	17	39	22	10
Nombre de garçons	13	36	8	5
Total	30	75	30	15

On choisit un adhérent au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi ait 17 ans ?

2. L'adhérent choisi a 18 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On note X la variable aléatoire donnant l'âge de l'adhérent choisi.

3. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. Calculer $P(X \geqslant 16)$ et interpréter le résultat.

5. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

(BNS)

1. Parmi les 150 adhérents, 30 ont 17 ans donc la probabilité est $p_1 = \dfrac{30}{150} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

2. Parmi les 15 adhérents âgés de 18 ans, 10 sont des filles donc la probabilité est $p_2 = \dfrac{10}{5} = \dfrac{1}{3}$.

3. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{15, 16, 17, 18\}$. On a le tableau

x_i	15	16	17	18
$P(X = x_i)$	$\dfrac{30}{150} = 0,2$	$\dfrac{75}{150} = 0,5$	$\dfrac{30}{150} = 0,2$	$\dfrac{15}{150} = 0,1$

4. On utilise l'événement contraire

$$P(X \geqslant 16) = 1 - P(X = 15) = 1 - 0,2 = 0,8$$

La probabilité qu'un adhérent soit âgé de 16 ans ou plus est donc 0,8.

5. Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire, on a

$$E(X) = 15 \times P(X = 15) + 16 \times P(X = 16) + 17 \times P(X = 17) + 18 \times P(X = 18)$$

$$E(X) = 15 \times 0,2 + 16 \times 0,5 + 17 \times 0,2 + 18 \times 0,1 = 3 + 8 + 3,4 + 1,8 = 16,2$$

En moyenne, un adhérent est âgé de 16,2 ans.

Exercice 15

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

1. Justifier qu'alors : $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

2. Démontrer que si A et B sont deux événements indépendants d'un univers Ω alors $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

1. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω donc, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

donc, $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

2. Si A et B sont indépendants alors, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
L'égalité précédente s'écrit alors

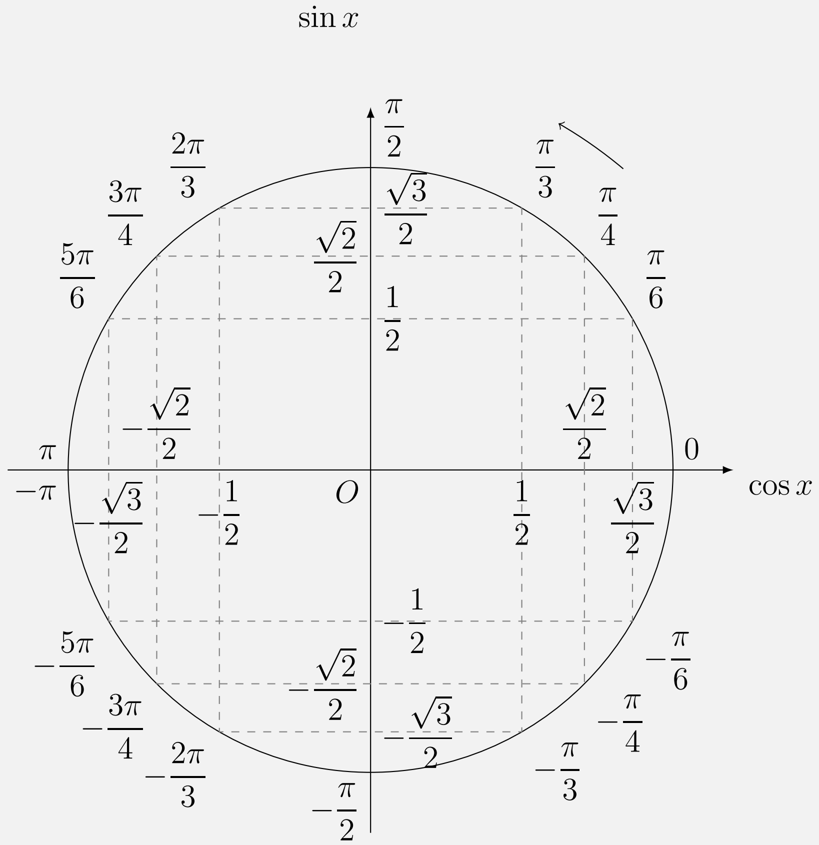
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$ donc les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Trigonométrie *

Rappels de cours

- ⋆ Dans un repère orthonormé du plan, on a le cercle trigonométrique



- ⋆ Pour tout réel x,
  - ♦ $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
  - ♦ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
  - ♦ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
  - ♦ $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
- ⋆ Soit $a \in [-1; 1]$.
  - ♦ Si x_0 est tel que $\cos x_0 = a$ alors,

$$\cos x = a \quad \text{si et seulement si} \quad x = x_0 + 2k\pi \text{ ou } x = -x_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

  - ♦ Si x_0 est tel que $\sin x_0 = a$ alors,

$$\sin x = a \quad \text{si et seulement si} \quad x = x_0 + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi - x_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- ⋆ La fonction $\cos : x \longmapsto \cos x$ est **paire** ($\cos(-x) = \cos x$) et **périodique** de période 2π ($\cos(x + 2\pi) = \cos x$).
- ⋆ La fonction $\sin : x \longmapsto \sin x$ est **impaire** ($\sin(-x) = -\sin x$) et **périodique** de période 2π ($\sin(x + 2\pi) = \sin x$).

Exercice 16

On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.

Le temps t est exprimé en seconde. La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$u(t) = \sqrt{3}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

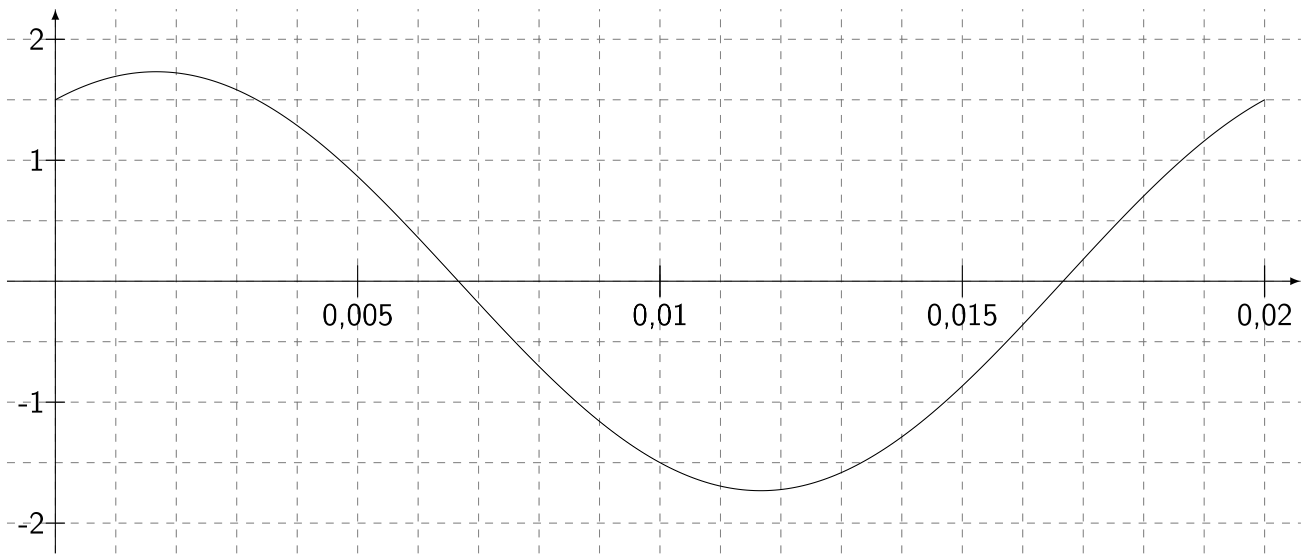
La diode est non passante si $u(t) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. La diode est-elle passante à l'instant $t = 0$?

2. Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.

3. On admet que $u\left(t + \frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. En déduire une propriété de la fonction u.

4. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction u sur l'intervalle [0; 0,02] :



On cherche à savoir au bout de combien de temps la diode devient non passante pour la première fois.

a. Conjecturer la solution du problème à l'aide du graphique.

b. Calculer $u(0,005)$ et conclure.

(BNS)

1. À l'instant $t = 0$, la tension vaut $u(0) = \sqrt{3}\sin\left(100\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

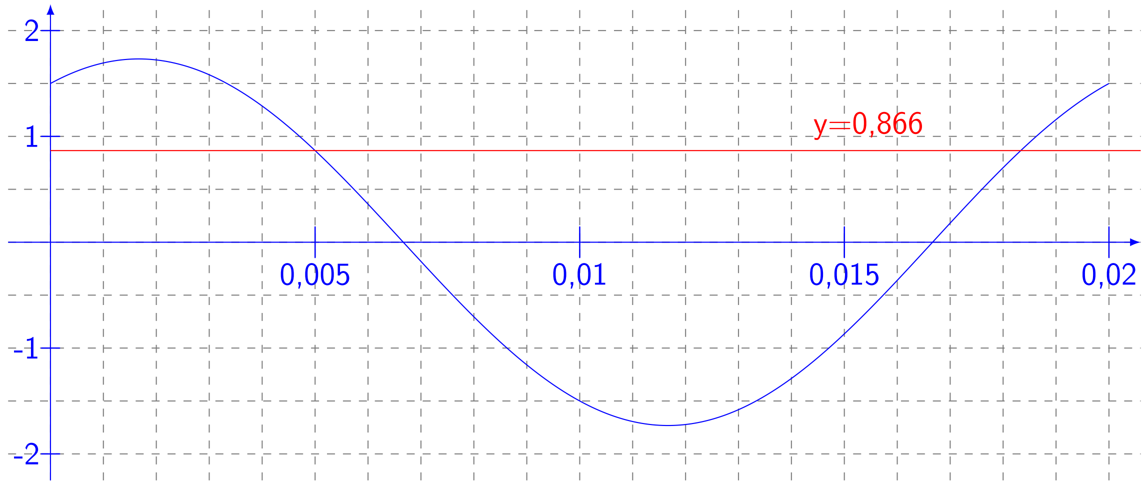
$\frac{3}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc la diode est passante à l'instant $t = 0$.

2. $u\left(\frac{1}{100}\right) = \sqrt{3}\sin\left(100\pi \times \frac{1}{100} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Après un centième de seconde, la diode n'est pas passante.

3. Pour tout $t \geqslant 0$, $u\left(t+\dfrac{2}{100}\right)=u(t)$ donc la fonction u est périodique de période $\dfrac{2}{100}$.

4. a. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ donc on utilise le graphique pour déterminer quand la courbe est au-dessous de la droite d'équation $y=0,866$.



On conjecture que la diode devient non passante pour la première fois au bout de 0,005 s (soit 5 ms).

b. $u(0,005)=\sqrt{3}\sin\left(100\pi\times 0,005+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

La conjecture est donc vérifiée.

Exercice 17

1. Vérifier que $4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}=0$.

3. En déduire la résolution dans $[-\pi;\pi]$ de l'équation $4\cos^2 x+2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x-\sqrt{3}=0$

1. $\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times 1+1^2=3+2\sqrt{3}+1=4+2\sqrt{3}$.

2. L'équation $4x^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}=0$ est une équation du second degré de discriminant

$\Delta=\left[2\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2-4\times 4\times\left(-\sqrt{3}\right)=4\left(4-2\sqrt{3}\right)+16\sqrt{3}=16-8\sqrt{3}+16\sqrt{3}=16+8\sqrt{3}=4\left(4+2\sqrt{3}\right)=4\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0$.

Cette équation admet donc deux solutions réelles

$$x_1=\frac{-2\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\times 4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2\left(\sqrt{3}-1\right)+\sqrt{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\times 4}$$

$$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-2}{8} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}+2}{8}$$

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{1}{2}$$

3. En posant $X = \cos x$, l'équation $4\cos^2 x + 2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x - \sqrt{3} = 0$ équivaut à l'équation $4X^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)X - \sqrt{3} = 0$ dont les solutions sont, d'après la question précédente, $X_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $4\cos^2 x + 2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x - \sqrt{3} = 0$ si et seulement si $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Or, sur $[-\pi;\pi]$,

- $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$.
- $\cos x = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $4\cos^2 x + 2\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x - \sqrt{3} = 0$ est donc

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Exercice 18
Exercice de recherche.

Montrer que, pour tout réel x, $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$

Pour tout réel x,

$$\sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x - \cos^2 x) \times 1 + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$$

$$= 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 3 \times 1 = 3$$

Calcul vectoriel et produit scalaire *

Rappels de cours

⋆ **Relation de Chasles** Pour tous points A, B, C, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

⋆ Si, dans un repère du plan, points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

⋆ Si, dans un repère **orthonormé** du plan, points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

⋆ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs **non nuls** et soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est le **réel**

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos \widehat{BAC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2]$
- Si, dans un repère orthonormé du plan, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors

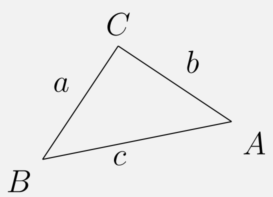
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB),

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} AH \times AB \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AH \times AB \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$
- Pour tous les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- Pour tous les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k, k', $\quad (k\overrightarrow{u}) \cdot (k'\overrightarrow{v}) = (kk') \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.
- Pour tous les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, $\quad \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
- **Théorème d'Al-Kashi**

Soit ABC un triangle avec $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.



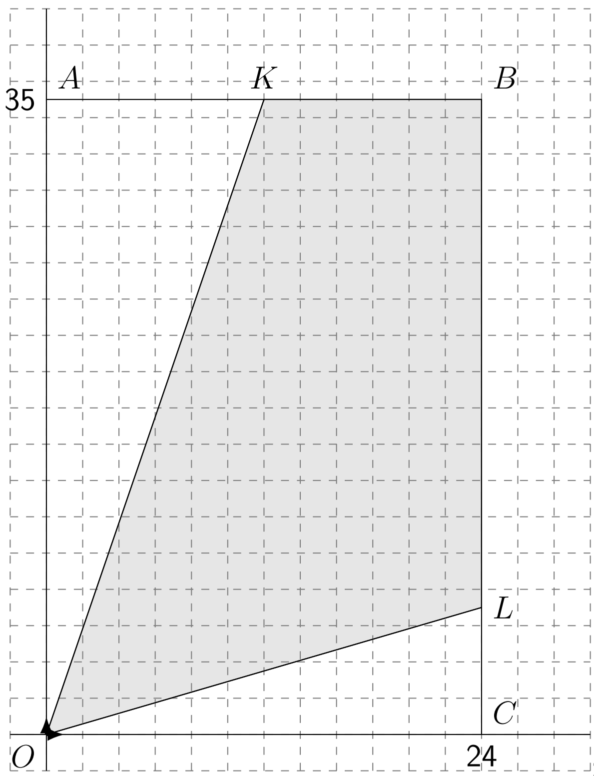
Alors, $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}$.

Exercice 19

Le rectangle $OABC$ ci-dessous représente une place touristique vue de dessus.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ tel que$\overrightarrow{OC} = 24\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{OA} = 35\overrightarrow{\jmath}$.

Afin d'éclairer le plus grand nombre de monuments, on place au point O, un projecteur lumineux qui permet d'éclairer la partie du plan délimitée par les segments de droite $[OK]$ et $[OL]$ tels que K est le milieu de $[AB]$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$.



;

1. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points A, B, C, K et L.
2. Un visiteur affirme : " *Moins de 70 % de la surface de la place est éclairée* ". Cette affirmation est-elle exacte ?
3. **a.** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OL}$.

   b. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OL}$ est égal à 533.

   c. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{KOL}$.

(BNS)

1. Par lecture graphique (1 graduation = 2 unités), on a

$$A(0; 35) \quad B(24; 35) \quad C(24; 0) \quad K(12; 35) \quad L(24; 7)$$

2. • Le rectangle $ABCO$ a pour aire $\mathbb{A}_1 = OA \times OC = 35 \times 24 = 840$.

   • Le triangle AKO est rectangle en A et a pour aire $\mathcal{A}_2 = \dfrac{OA \times AK}{2} = \dfrac{35 \times 12}{2} = 210$

   • Le triangle CLO est rectangle en C et a pour aire $\mathcal{A}_3 = \dfrac{OC \times CL}{2} = \dfrac{24 \times 7}{2} = 84$

   L'aire de la surface éclairée (le polygone $OKBL$ vaut donc $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$

   $\mathcal{A}_4 = 840 - 210 - 84 = 546$.

$\frac{546}{840} = 0,65 < 0,7$. La surface éclairée est donc inférieure à 70% de la surface de la place.
L'affirmation est donc exacte.

3. **a.** On a $K(12;35)$ et $L(24;7)$ donc

$$\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}12\\35\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OL}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$$

b. On en déduit que

$$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OL} = 12\times 24 + 35\times 7 = 288 + 245 = 533$$

c. Par définition, on a

$$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OL} = OK \times OL \times \cos\widehat{KOL}$$

Or, $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OL} = 533$, $OK = \sqrt{12^2+35^2} = \sqrt{1369} = 37$ et $OL = \sqrt{24^2+7^2} = \sqrt{625} = 25$ donc

$$533 = 37\times 25\times\cos\widehat{KOL} = 925\cos\widehat{KOL}$$

donc $\cos\widehat{KOL} = \frac{533}{925}$ donc $\widehat{KOL} \approx 55°$

Exercice 20
Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ du plan, on considère les points $A(2;-1)$, $B(0;3)$ et $C(3;1)$.

1. **a.** Vérifier que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6$.

b. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$, on donnera les valeurs exactes.

c. Vérifier que $\cos\widehat{BAC} = 0,6$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de C.

a. Justifier que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

b. On admet que le point H a ses coordonnées de la forme $H(x;3-2x)$.
Calculer la valeur de x et en déduire les coordonnées du point H.

(d'après BNS)

1. **a.** On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\3-(-1)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\1-(-1)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

On a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\times 1 + 4\times 2 = -2+8 = 6$.

b. On a

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

c. Par définition du produit scalaire, on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}$$

donc

$$6 = 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{BAC}$$
$$6 = 10\cos\widehat{BAC}$$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{10} = 0,6$ donc $\widehat{BAC} \approx 53°$.

2. a. H est le pied de la hauteur issue de C donc les vecteurs $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ce qui signifie que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC} = 0$. On a alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

b. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-2 \\ 3-2x-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-2 \\ 4-2x\end{pmatrix}$. On a alors,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -2(x-2)+4(4-2x) = -2x+4+16-8x = 20-10x = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6$$

x est donc solution de l'équation $6 = 20-10x$ ce qui équivaut à $10x = 20-6$ ou encore $10x = 14$ donc $x = 1,4$.

Le point H a donc pour coordonnées $(1,4;3-2\times 1,4)$ c'est-à-dire $(1,4;0,2)$.

Exercice 21
Exercice de recherche.

Soient A, B deux points distincts.

1. Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$.

1. I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$.

On a, parles propriétés du produit scalaire

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)$$

Par la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{IM}\right) = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}$$

2. D'après le résultat de la question précédente, on sait que l'égalité $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

équivaut à l'égalité $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$ qui équivaut à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$ ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux ce qui signifie que le point M doit appartenir à la perpendiculaire à (AB) passant par I.

I étant le milieu du segment $[AB]$, on en déduit que l'ensemble des points M recherchés est la médiatrice du segment $[AB]$.

Droites et cercles *

Rappels de cours

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- ⋆ On appelle **équation de droite** (ou plus généralement équation de courbe) toute équation d'inconnues x et y dont l'ensemble des solutions est exactement l'ensemble des coordonnées $(x;y)$ des points de la droite (ou de la courbe).
- ⋆ Pour toute droite Δ du plan, il existe trois réels a, b et c ($(a,b) \neq (0,0)$) tels que

  $M(x;y) \in d$ si et seulement si $ax + by + c = 0$.

  L'équation $ax + by + c = 0$ est alors une **équation cartésienne** de la droite Δ.
- ⋆ Un vecteur *non nul* $\overrightarrow{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite Δ si et seulement si pour tous les points A et B appartenant à Δ, $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
- ⋆ Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

  $$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ab' - a'b = 0.$$
- ⋆ Si Δ est une droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur directeur** alors

  $M(x;y) \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**

  ce qui équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = (x - x_A) \times b - a(y - y_A) = 0$.
- ⋆ Les droites $\Delta\ :\ ax + by + c = 0$ et $\Delta'\ :\ a'x + b'y + c' = 0$ sont **parallèles** si et seulement si les couples (a, b) et (a', b') sont proportionnels.
- ⋆ Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est **normal** à une droite Δ si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de Δ.
- ⋆ Si Δ est une droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour **vecteur normal** alors

  $M(x;y) \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont **orthogonaux**

  ce qui équivaut à $\overrightarrow{AM}, \cdot \overrightarrow{n} = (x - x_A) \times a + b(y - y_A) = 0$.
- ⋆ Si la droite Δ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à Δ.
- ⋆ Soit le point $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$. Soit R un réel positif.
  Le cercle de centre Ω et de rayon R admet pour équation

  $$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Exercice 22

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;3)$, $B(5;0)$ et $C(9;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
3. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.
4. Vérifier que le point $E(3;1)$ est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (AB).
5. Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
6. On donne $AE = 2\sqrt{5}$ et $EC = 2\sqrt{10}$.

   Calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{AEC}$.

(d'après BNS)

1. $M(x;y) \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

   ce qui équivaut à $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$ ce qui équivaut à $(-3)(x+1) - 6(y-3) = 0$ ou encore $-3x - 3 - 6y + 18 = 0$ soit $-3x - 6y + 15 = 0$.

   Une équation de la droite (AB) est donc $-3x - 6y + 15 = 0$.

2. $M(x;y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-9\\y-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ce

   qui équivaut à $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à $(x-9) \times (-1) + (y-3) \times 3 = 0$ ou encore

   $-x + 9 + 3y - 9 = 0$ soit $-x + 3y = 0$.

   Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est donc $-x + 3y = 0$.

3. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ont pour équations

   $$(AB) \ : \ -3x - 6y + 15 = 0 \qquad \mathcal{D} \ : \ -x + 3y = 0$$

   Les coefficients $(-3;-6)$ est $(-1;3)$ ne sont pas proportionnels donc les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

4.
   - $-3 \times 3 - 6 \times 1 + 15 = -9 - 6 + 15 = -15 + 15 = 0$ donc $E \in (AB)$,
   - $-3 + 3 \times 1 = -3 + 3 = 0$ donc $E \in \mathcal{D}$.

   Le point E est donc bien le point d'intersection des droites (AB) et $\mathcal{D}$.

5. une équation de la droite (AB) est $-3x - 6y + 15 = 0$ donc un vecteur normal de la droite (AB)

   est le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (AB).

   Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux. Or, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = -1 \times (-3) + 3 \times (-6) = 3 - 18 = -15 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas orthogonaux donc les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas perpendiculaires.

6. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 9-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC} = -4\times 6 + 2\times 2 = -24+4 = -20 = EA\times EC\times\cos\widehat{AEC}$$

donc $-20 = 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{10}\cos\widehat{AEC} = 4\sqrt{50}\cos\widehat{AEC}$ donc $\cos\widehat{AEC} = \dfrac{-20}{4\sqrt{50}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or, $\cos 135° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\widehat{AEC} = 135°$.

Exercice 23

Soit $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.
On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2;5)$ et de rayon 5.

1. Montrer qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ est $x^2+y^2-4x-10y=-4$.
2. Vérifier que le point $B(5;9)$ appartient à ce cercle.
3. On rappelle qu'une droite tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon du cercle passant par ce point.
   Déterminer une équation de la tangente au cercle au point B.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.

(d'après BNS)

1. $M(x;y)\in\mathcal{C}$ si et seulement si $AM^2=5^2$ ce qui équivaut à

   $(x-2)^2+(y-5)^2=25$ ou encore $x^2-4x+4+y^2-10y+25=25$ ce qui équivaut à

   $x^2-4x+y^2-10y+4=0$ ou encore $x^2+y^2-4x-10y=-4$.

2. $5^2+9^2-4\times 5-10\times 9 = 25+81-20-90 = 106-110 = -4$ donc B appartient bien au cercle $\mathcal{C}$.

3. Par propriété de la tangente, on sait que la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point B est perpendiculaire au rayon $[AB]$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal à cette tangente.

   Un point $M(x;y)$ appartient donc à la tangente si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y-9 \end{pmatrix}$ et

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ce qui équivaut à $3(x-5)+4(y-9)=0$

   ou encore $3x-15+4y-36=0$ c'est-à-dire $3x+4y-51=0$.

   Une équation de la tangente au cercle au point B est donc $3x+4y-51=0$.

4. Les points sur l'axe des ordonnées ont des coordonnées de la forme $(0; y)$ donc les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées ont leur ordonnée y qui vérifie l'équation $y^2 - 10y = -4$ qui équivaut à $y^2 - 10y + 4 = 0$.

   Cette équation est une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 84 > 0$. Cette équation admet donc deux solutions réelles

$$y_1 = \frac{10 - \sqrt{84}}{2 \times 1} = \frac{10 - 2\sqrt{21}}{2} = 5 - \sqrt{21} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{10 + \sqrt{84}}{2 \times 1} = \frac{10 + 2\sqrt{21}}{2} = 5 + \sqrt{21}$$

   Le cercle $\mathcal{C}$ coupe donc l'axe des ordonnées aux points de coordonnées $(0; 5 - \sqrt{21})$ et $(0; 5 + \sqrt{21})$.

Exercice 24

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(-3; 1)$, $B(3; 5)$ et $C(7; 1)$ dans ce repère.

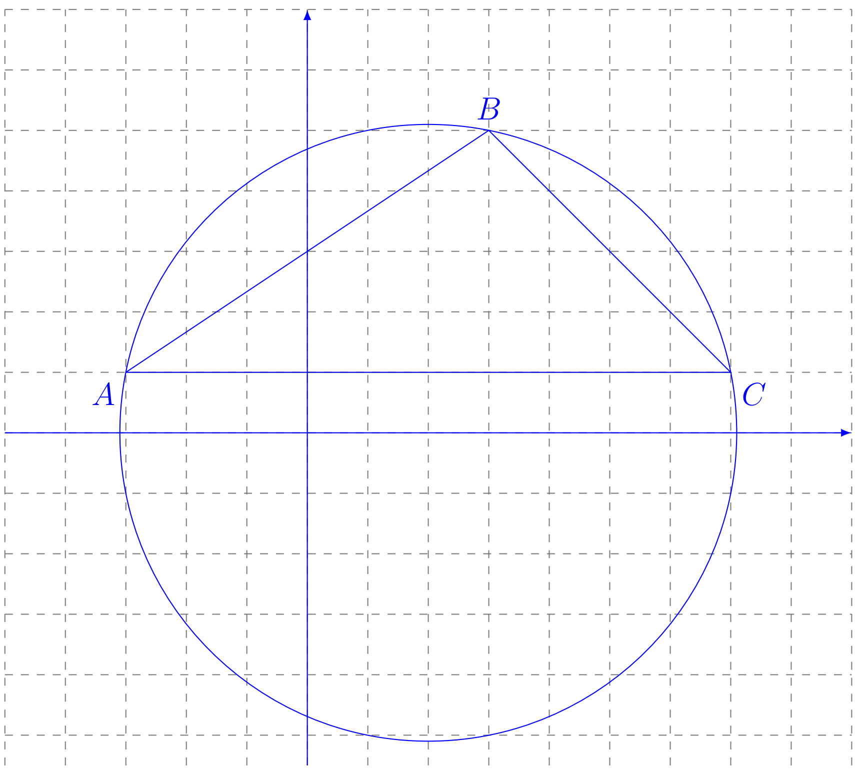
Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon de ce cercle.

On rappelle que le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

1. Placer les points A, B et C dans le plan puis construire le cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Vérifier que la droite Δ d'équation $3x + 2y - 6 = 0$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
3. Déterminer les coordonnées du point B', milieu du segment $[AC]$.
4. Déterminer les coordonnées du point I, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
5. Calculer une valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
6. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

(d'après BNS)

1. On a la figure



2. Soit C' le milieu de $[AB]$, on a

$$C'\left(\frac{-3+3}{2};\frac{1+5}{2}\right)$$

$$C'(0;3)$$

$M(x;y) \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

ce qui équivaut à $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ qui s'écrit aussi $6x + 4(y-3) = 0$ ou encore $6x + 4y - 12 = 0$.

En divisant cette égalité par deux, on obtient l'équation $3x + 2y - 6 = 0$.

3. Le point B' milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées

$$B'\left(\frac{-3+7}{2};\frac{1+1}{2}\right)$$

$$B'(2;1)$$

4. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point de concours des médiatrices du triangle.

On note Δ' la médiatrice du segment $[AC]$. Les points A et C ont la même ordonnée donc la droite (AC) est parallèle à l'axe des abscisses donc Δ' est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par le point $B'(2;1)$ donc une équation de Δ' est $x = 2$.

Le point I est donc le point d'intersection des droites Δ et Δ'. On résout donc le système

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ 3 \times 2 + 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le point I a donc pour coordonnées $(2;0)$.

5. La longueur IA est un rayon du cercle et

$$IA = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

Le cercle circonscrit au triangle ABC a donc pour rayon $\sqrt{26}$.

6. Le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de centre $I(2;0$ et de rayon $\sqrt{26}$ donc il admet pour équation

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 26$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 22 = 0$$