Limites et calculs de limites

- **QCM 1**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - x + 1}{1 - x^2} = \dots$

A. $+\infty$ **C.** 0

B. $-\infty$ **D.** 1

On a une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x^3 - x + 1}{1 - x^2} = \dfrac{x^2\left(x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)} = \dfrac{x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} - 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$ donc

$$\lim_{x \to -\infty} x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$$

donc, par quotient,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x + 1}{1 - x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} - 1} = +\infty$$

Réponse A.

- **QCM 2**

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \dots$

A. 1 **C.** 4

B. 3 **D.** 0

On a une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. On remplace donc x par $3 + h$ et on fera tendre h vers 0.

$$\frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{(3+h) - 3} = \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h - 3}{3 + h - 3} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

On a alors

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{h \to 0} h + 4 = 4$$

Réponse C.

- **QCM 3**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ est égale à

A. $+\infty$

B. 0

C. 1

D. 2

On a une forme indéterminée de type $\infty-\infty$.

On utilise l'égalité $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Pour tout $x>1$,

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}=+\infty$.

On a donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}=+\infty$. On a donc, par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

Réponse B.

- **QCM 4**

$\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2+x+1}{4-x^2}$ est égale à

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. 1

D. 0

$\lim\limits_{x\to2^-} x^2+x+1=3$ et $\lim\limits_{x\to2^-} 4-x^2=0$.

On doit donc étudier le signe de $4-x^2$ pour savoir si la limite est 0^+ ou 0^-.

$x^2-4=0$ si et seulement si $x^2=4$ ce qui équivaut à $x=-2$ et $x=2$.
$1-x^2$ est donc du signe de $a=-1$ partout sauf entre ses racines donc on a le tableau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures, $4-x^2$ est positif donc $\lim\limits_{x \to 2^-} 4-x^2 = 0^+$. Par quotient, on en déduit que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+x+1}{4-x^2} = +\infty$$

Réponse A.

- **QCM 5**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4x-5} - x$ est égale à

A. $+\infty$

B. 0

C. 1

D. 2

On a une forme indéterminée de type $\infty - \infty$.
On utilise l'égalité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Pour tout $x > 1$,

$$\sqrt{x^2+4x-5} - x = \sqrt{x^2+4x-5} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2+4x-5-x^2}{\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x^2}} = \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+4x-5}+x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 4x-5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4x-5}+x = +\infty$ donc on a encore une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On factorise le numérateur et le dénominateur par x. Pour tout $x > 1$,

$$\sqrt{x^2+4x-5}+x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}+x = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+x$$
$$= x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+x = x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1\right)$$

On a donc, pour tout $x > 1$,

$$\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+4x-5}+x} = \frac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1\right)} = \frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1}$$

On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+4x-5}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{4}{\sqrt{1}+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Réponse D.