Limites et calculs de limites

De façon très schématique, la limite est un outil permettant d'évaluer une expression algébrique lorsque le calcul "direct" n'est pas possible (valeur interdite ou infini). La *limite de f(x) lorsque x tend vers a* se note

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

Une limite peut être égale à un nombre réel ou a l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

1 Premiers résultats

- Soit n un nombre entier naturel non nul. On a alors,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

- Si a est un réel non nul et n est un entier naturel,

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{pour } a \geqslant 0, \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

2 Opérations sur les limites

Soient f et g des fonctions dont les ensembles de définitions sont compatibles, ℓ et ℓ' deux réels. a est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Somme

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	∞	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$	$\ell\ell'$	signe ∞	signe ∞	FI

Quotient

Dans cette partie, $\ell' \neq 0$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	∞	ℓ	∞	0	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	0	ℓ'	∞	∞	∞ ou ℓ'	0
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	signe ∞	signe ∞	0	FI	0	FI

- signe indique qu'il faut appliquer la règle des signes.
- FI désigne une *forme indéterminée*, c'est-à-dire une forme qui nécessite des calculs supplémentaires pour permettre de répondre.

3 Calculs de limites

Pour calculer une limite, on peut effectuer la démarche suivante :

⋆ Calculer très rapidement (de tête ou au brouillon) les limites des différents termes pour voir s'il y a une forme indéterminée ou pas.

⋆ S'il n'y a pas de forme indéterminée, faire le calcul direct.

⋆ S'il y a un quotient dont le dénominateur tend vers 0, on peut établir le tableau de signe du dénominateur afin de savoir si on tend vers 0 par des valeurs inférieures (0^-) ou des valeurs supérieures (0^+) afin de pouvoir appliquer la règle des signes.

⋆ S'il y a une forme indéterminée, on peut :

- dans le cas d'une différence avec une (ou deux) racine carrée, on peut utiliser l'égalité

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{(a et b positifs)}$$

- Dans le cas d'une différence d'infinis ou d'un quotient d'infini, on peut factoriser par ce *"qui tend le plus vite"* vers l'infini. Lorsqu'il s'agit d'un quotient, on factorisera de préférence le numérateur par son terme qui *"tend le plus vite"* vers l'infini et le dénominateur par son terme qui *"tend le plus vite"* vers l'infini.
- Dans le cas d'un quotient où le dénominateur et le numérateur tendent tous les deux vers 0, on pourra remplacer x par $a+h$ (où a désigne la valeur vers laquelle tend x) puis faire tendre h vers 0 ou retrouver un taux de variation et utiliser la définition du nombre dérivé.

4 Exemples

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+2}{1-x}$

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 1} - x$