Multiples, diviseurs et nombres premiers

On rappelle que $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers et $\mathbb{N}$ l'ensemble de nombres entiers naturels.

1 Multiples et diviseurs

Définitions

Soient a et b deux nombres entiers.
a est un **multiple** de b si et seulement si il existe un entier k tel que $a = b \times k$.

b est un **diviseur** de a si et seulement si il existe un entier k tel que $a = b \times k$.

Remarque

Si a est un multiple de b alors b est un diviseur de a, et réciproquement.

Exemples

- 17 est un diviseur de 51 $(51 = 3 \times 17)$
- 132 est un multiple de 11 $(132 = 11 \times 12)$

Propriétés

Soit n un nombre entier.

- Si le chiffre des unités de n est 0 alors n est divisible par 10.
- Si le chiffre des unités de n est 0 ou 5 alors n est divisible par 5.
- Si le chiffre des unités de n est pair alors n est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres composant le nombre n est un multiple de 3 alors n est divisible par 3.
- Si la somme des chiffres composant le nombre n est un multiple de 9 alors n est divisible par 9.

Exemples

- 171 est divisible par 9 puisque $1 + 7 + 1 = 9$.

- 1212 se termine par un nombre pair donc est divisible par 2. De plus, $1+2+2+1=6$ donc 1212 est aussi divisible par 3.
  Étant divisible par 2 et par 3, on sait que ce nombre est aussi divisible par 6.

Propriété

Soient a, b et c trois nombres entiers.
Si b et c sont deux multiples de a alors $b+c$ est un multiple de a.

Preuve

b et c sont deux multiples de a donc il existe deux entiers k et k' tels que

$$b = a \times k \qquad \textit{et} \qquad c = a \times k'$$

On a alors

$$b + c = a \times k + a \times k' = a \times (k + k')$$

k et k' étant deux entiers, leur somme $k+k'$ est également un entier donc $b+c$ est bien un multiple de a.

Exemple

121 et 55 sont deux multiples de 11 donc $121+55=176$ est aussi un multiple de 11.

2 Nombres premiers

Définition

Un **entier naturel** n est un **nombre premier** si et seulement si il admet seulement de diviseurs **distincts** et **positifs** : 1 et lui-même.

Remarques

- Tout nombre non nul est un diviseur de 0 donc 0 a une infinité de diviseurs donc 0 n'est pas un nombre premier.
- 1 n'a pas deux diviseurs distincts ce n'est donc pas un nombre premier.
- 2 est donc le premier nombre premier.

Crible d'Ératosthène

On écrit la liste des nombres entiers naturels puis on barre tous les entiers qui ne sont pas premiers.
Pour cela on peut utiliser le fait que si n est un multiple de k alors $n+k$ est aussi un multiple de k.

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~

Propriété

Tout nombre entier naturel peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
Ce produit est unique et est appelé la **décomposition en produit de facteurs premiers** du nombre.

Remarque

Si le nombre est un entier négatif, on peut alors l'écrire comme un produit de nombres premiers multiplié par -1.

Exemples

- $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$
- $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

- $-680 = -1 \times 68 \times 10 = -1 \times 2 \times 34 \times 2 \times 5 = -1 \times 2 \times 2 \times 17 \times 2 \times 5$ $= -1 \times 2^3 \times 5 \times 17$

Applications

Fraction irréductible

On peut ramener une fraction à sa forme irréductible en faisant la décomposition en produit de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur puis en supprimant les facteurs communs.

Exemples

- $\dfrac{123}{456} = \dfrac{3 \times 41}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 19} = \dfrac{41}{2^3 \times 19} = \dfrac{41}{152}$

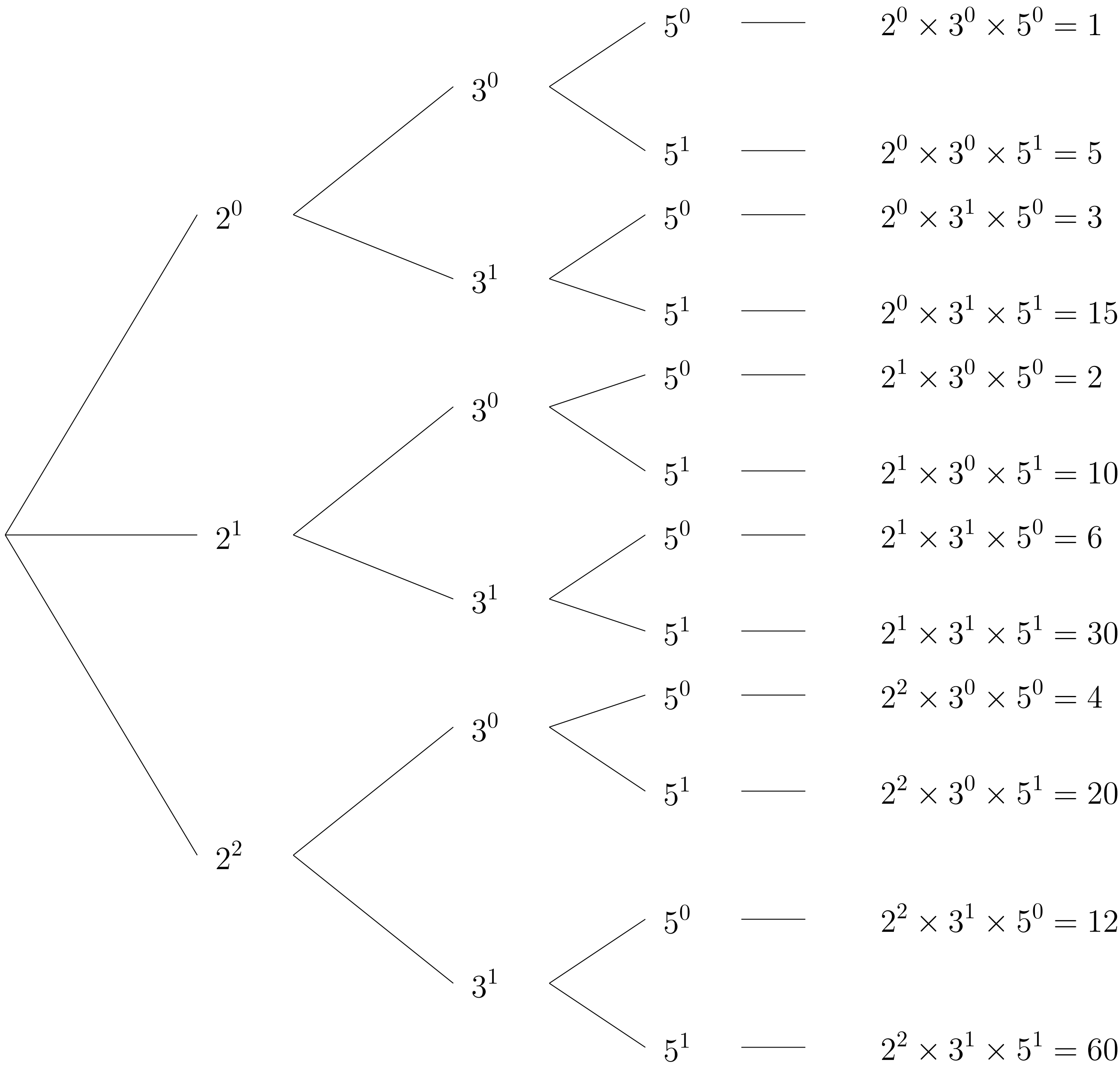
- $\dfrac{484}{880} = \dfrac{4 \times 121}{88 \times 10} = \dfrac{2^2 \times 11^2}{8 \times 11 \times 2 \times 5} = \dfrac{2^2 \times 11^2}{2^4 \times 5 \times 11} = \dfrac{11}{2^2 \times 5} = \dfrac{11}{20}$

Diviseurs d'un nombre

Tous diviseur d'un nombre est une combinaison de facteurs premiers présents dans la décomposition en produit de facteurs premiers dudit nombre.
On peut donc, à l'aide d'un arbre, déterminer tous les diviseurs d'un nombre en établissant toutes les combinaisons possibles des facteurs premiers présents dans la décomposition.

Exemple

$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ donc le facteur 2 peut être "pris" 0 fois, 1 fois ou 2 fois. Les facteurs 3 et 5 peuvent eux être "pris" 0 fois ou 1 fois.
On a alors l'arbre



Remarque

Grâce à la décomposition en produit de facteurs premiers, on peut déterminer à l'avance le nombre de diviseurs.
Si un entier n a pour décomposition

$$n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \ldots \times p_m^{k_m}$$

alors il y a $(k_1 + 1)$ choix possibles pour le facteur p_1, $(k_2 + 1)$ choix possibles pour le facteur p_2 et ainsi de suite.
Il y a donc, au total, $(k_1+1) \times (k_2+1) \times \ldots \times (k_m+1)$ combinaisons possibles.
C'est donc le nombre de diviseurs de n.

3 Nombres pairs, nombres impairs

Définitions

- Un nombre entier est pair si et seulement si il est un multiple de 2.
- Un nombre entier est impair si et seulement si il n'est pas un multiple de 2.

Conséquences

- Si n est un entier pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.
- Si n est un entier impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.
- Un nombre entier est soit pair, soit impair.

Propriété

Soit n un entier.
Parmi les deux entiers consécutifs n et $n + 1$, il y toujours un nombre pair et un nombre impair.

Preuve

On raisonne par disjonction des cas.

- *Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ et donc l'entier suivant vaut $n + 1 = 2k + 1$ et il s'agit donc d'un nombre impair.*
- *Si n est impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ et donc l'entier suivant vaut $n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ et il s'agit donc d'un nombre pair.*

Propriété

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Preuve

Soit n un nombre impair. Il existe alors un entier k tel que $n = 2k + 1$. On a alors
$n^2 = (2k+1)^2 = 2k\times 2k+2k\times 1+1\times 2k+1\times 1 = 2\times 2k^2+2\times 2k+1 = 2(2k^2+2k)+1$
$2k^2 + 2k$ *est un entier donc, en posant* $K = 2k^2 + 2k$, *on a* $n^2 = 2K + 1$ *donc* n^2 *est impair.*

Définitions

- On appelle **proposition** tout énoncé ayant une valeur de vérité (vrai ou faux).
- On appelle **implication** une relation entre deux propositions telle que la première étant vraie, la seconde est nécessairement vraie.
  Habituellement, une implication s'exprime sous la forme

  Si A alors B

  Une implication est vraie si elle est toujours valide.
- On appelle **réciproque** de l'implication "Si A alors B", l'implication "Si B alors A".
  La réciproque d'une implication vraie n'est pas nécessairement vraie.
- On appelle **contraposée** de l'implication "Si A alors B" l'implication "Si (non B) alors (non A)".
  La contraposée d'une implication vraie est nécessairement vraie.

Exemple

Soient les propositions :

- A : *"c'est un chat"*
- B : *" c'est un mammifère"*

⋆ L'implication "Si c'est un chat alors c'est un mammifère" est vraie.

⋆ La réciproque "Si c'est un mammifère alors c'est un chat" est fausse.

⋆ La contraposée "Si ce n'est pas un mammifère alors ce n'est pas un chat" est vraie.

Propriété

Si un carré est pair, alors c'est le carré d'un nombre pair.

Preuve

Il s'agit de la contraposée de la propriété précédente.

Propriété

$\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

Preuve

On effectue un raisonnement par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ puisse être un rationnel.
Il existe alors deux entiers p et q tel que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{et la fraction } \frac{p}{q} \text{ est irréductible}$$

On a alors, en mettant les membres de cette égalité au carré $2 = \frac{p^2}{q^2}$ et donc, $p^2 = 2p^2$.
p^2 étant pair, on en déduit, d'après la propriété précédente, que p est pair.
Il existe donc un entier k tel que $p = 2k$. On a alors

$$p^2 = (2k)^2 = 2^2 \times k^2 = 4k^2 = 2q^2$$

donc $q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair donc q est pair.
Ainsi, en supposant que $\sqrt{2}$ est un rationnel, on obtient que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible avec p pair et q pair.
Ceci n'étant pas possible, on en déduit que $\sqrt{2}$ ne peut pas être un rationnel et qu'il s'agit donc d'un irrationnel.