Les Vecteurs

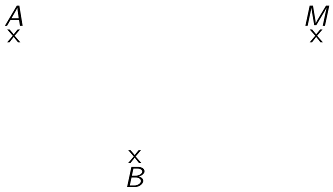
Définition

Soient A et B deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** la transformation du plan qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.

I. Translations et vecteurs

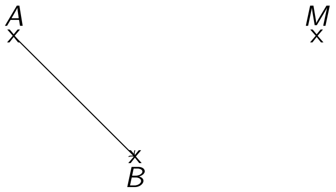
Définition

Soient A et B deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** la transformation du plan qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.



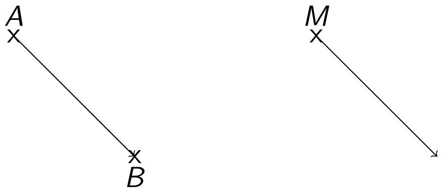
Définition

Soient A et B deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** la transformation du plan qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.



Définition

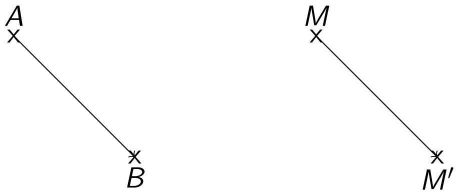
Soient A et B deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ la transformation du plan qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.



I. Translations et vecteurs

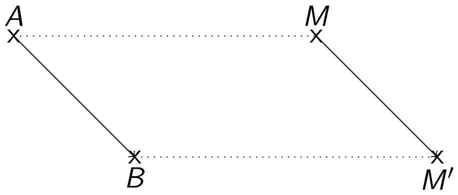
Définition

Soient A et B deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** la transformation du plan qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.



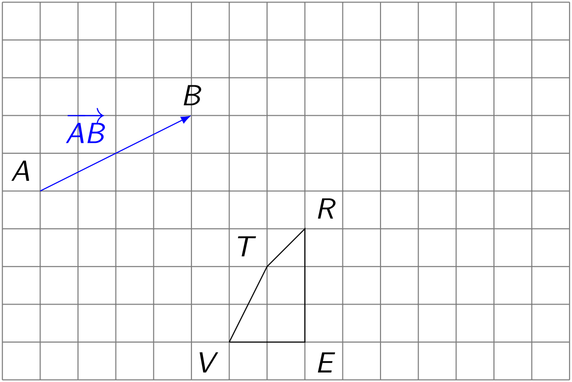
Définition

Soient A et B deux points du plan.
On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** la transformation du plan qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.



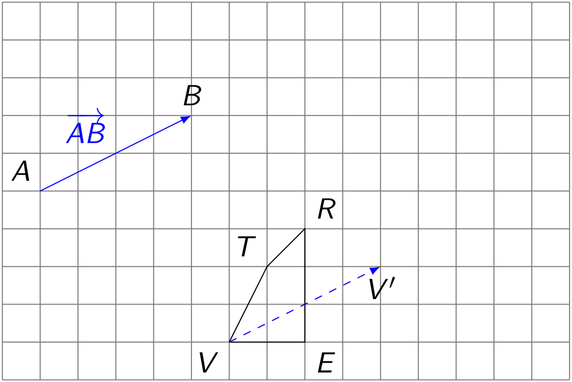
Exemple

Le quadrilatère $V'E'R'T'$ est l'image du quadrilatère $VERT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



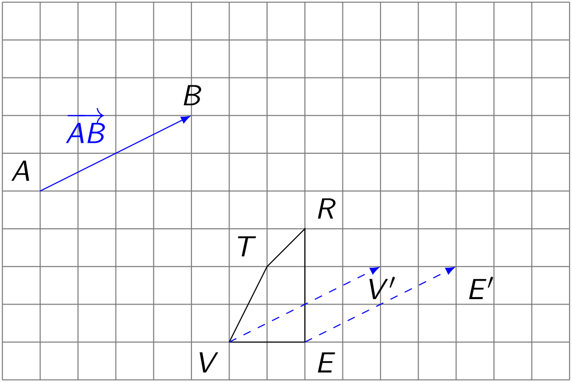
Exemple

Le quadrilatère $V'E'R'T'$ est l'image du quadrilatère $VERT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



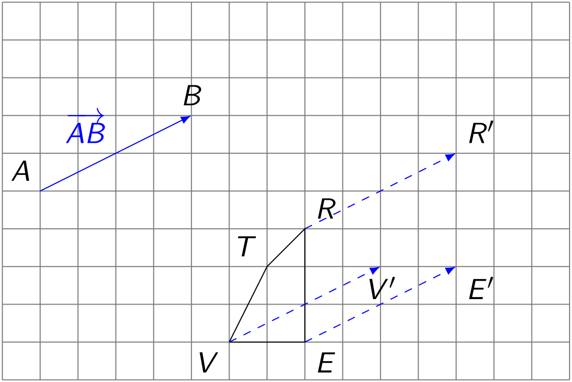
Exemple

Le quadrilatère $V'E'R'T'$ est l'image du quadrilatère $VERT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



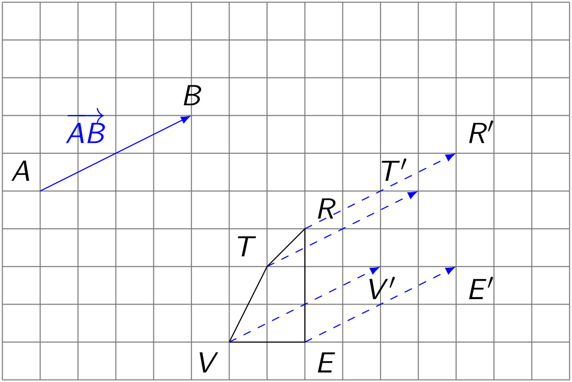
Exemple

Le quadrilatère $V'E'R'T'$ est l'image du quadrilatère $VERT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



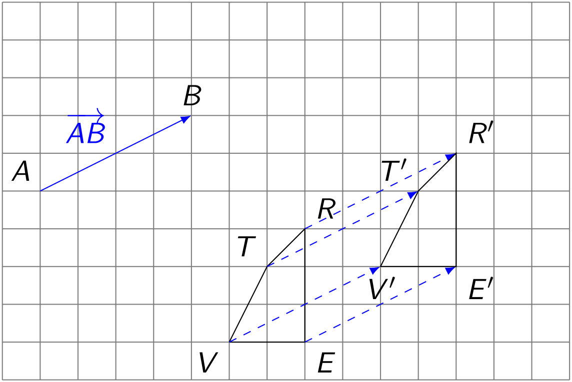
Exemple

Le quadrilatère $V'E'R'T'$ est l'image du quadrilatère $VERT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemple

Le quadrilatère $V'E'R'T'$ est l'image du quadrilatère $VERT$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Remarque

Un vecteur définit donc un déplacement.

Définition

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils définissent la même translation.

Propriétés

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Propriétés

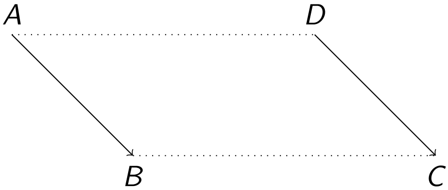
Soient A, B, C et D quatre points du plan.

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Propriétés

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.



Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,
  - ils ont la même norme (longueur).

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,
  - ils ont la même norme (longueur).
- Un vecteur peut donc être défini par

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,
  - ils ont la même norme (longueur).
- Un vecteur peut donc être défini par
  - sa direction,

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,
  - ils ont la même norme (longueur).
- Un vecteur peut donc être défini par
  - sa direction,
  - son sens,

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,
  - ils ont la même norme (longueur).
- Un vecteur peut donc être défini par
  - sa direction,
  - son sens,
  - sa norme.

Conséquences

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si
  - ils ont la même direction,
  - ils ont le même sens,
  - ils ont la même norme (longueur).
- Un vecteur peut donc être défini par
  - sa direction,
  - son sens,
  - sa norme.

Vocabulaire et notation

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

Vocabulaire et notation

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

- Si A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Vocabulaire et notation

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur.

- Si A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.
- La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $\|\overrightarrow{u}\|$.

Définition

On appelle **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$, le vecteur associé à la translation laissant tous les points du plan invariants (aucun déplacement).

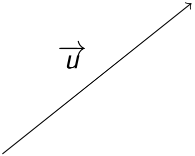
Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

II. Somme de deux vecteurs

Définition

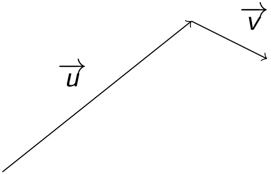
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



II. Somme de deux vecteurs

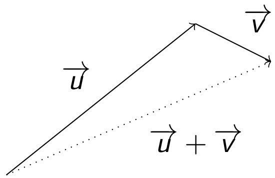
Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Conséquence

Pour représenter le vecteur égal à une somme de plusieurs vecteurs, on pourra

Conséquence

Pour représenter le vecteur égal à une somme de plusieurs vecteurs, on pourra

- tracer des représentants de ces vecteurs les uns à la suite des autres,

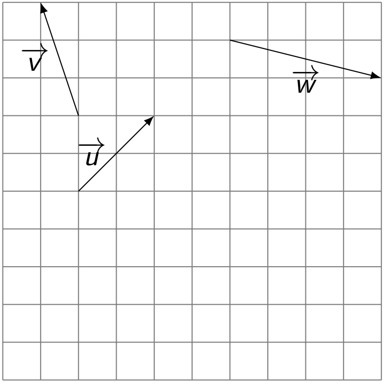
Conséquence

Pour représenter le vecteur égal à une somme de plusieurs vecteurs, on pourra

- tracer des représentants de ces vecteurs les uns à la suite des autres,
- relier l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur.

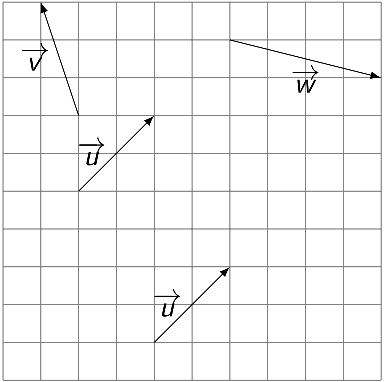
Exemple

Représenter le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



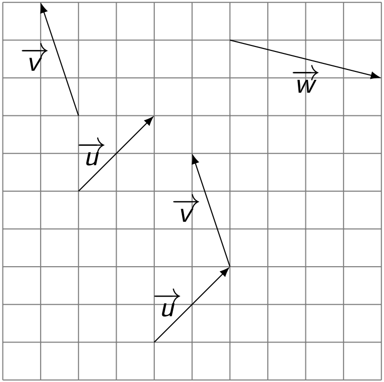
Exemple

Représenter le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



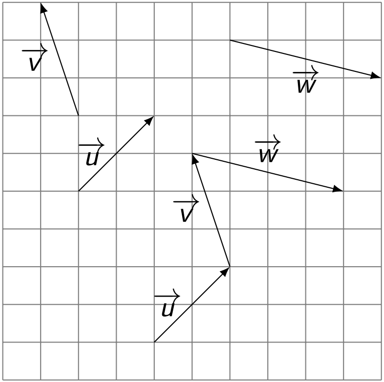
Exemple

Représenter le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



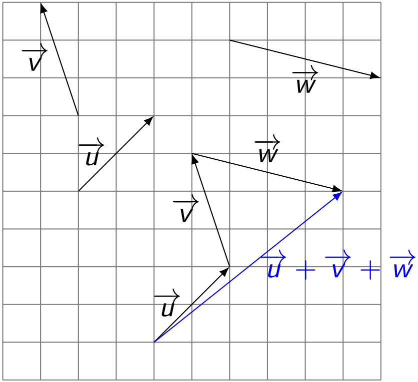
Exemple

Représenter le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



Exemple

Représenter le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



Propriété : Relation de Chasles

Soient A, B, C trois points du plan.
On a alors,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Preuve

Par définition, B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Preuve

Par définition, B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Ainsi, l'image de A par la translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est le point C.

Preuve

Par définition, B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Ainsi, l'image de A par la translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est le point C.
L'enchaînement de ces deux translations équivaut donc à la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

Preuve

Soit M un point du plan.

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors
$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ *et*

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Soit M_3 l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Soit M_3 l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
On a alors, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le quadrilatère $M_1M_2M_3M$ est un parallélogramme.

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Soit M_3 l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
On a alors, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le quadrilatère $M_1M_2M_3M$ est un parallélogramme.
On a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{u}$.

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Soit M_3 l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
On a alors, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le quadrilatère $M_1M_2M_3M$ est un parallélogramme.
On a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{u}$.
Ainsi, M_2 est l'image de M_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ donc

Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Soit M_3 l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
On a alors, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le quadrilatère $M_1M_2M_3M$ est un parallélogramme.
On a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{u}$.
Ainsi, M_2 est l'image de M_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ donc M_2 est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

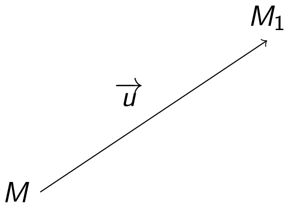
Preuve

Soit M un point du plan.
Soient M_1 l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et M_2 l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, on a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{v}$.
Par définition, M_2 est aussi l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
Soit M_3 l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
On a alors, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ donc le quadrilatère $M_1M_2M_3M$ est un parallélogramme.
On a alors $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{u}$.
Ainsi, M_2 est l'image de M_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ donc M_2 est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
Les translations de vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ donnent les mêmes images, les vecteurs sont donc égaux.

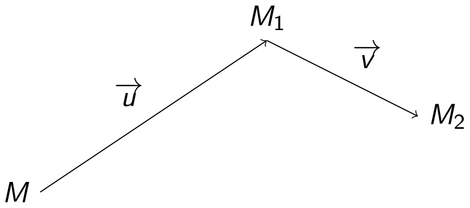
II. Somme de deux vecteurs

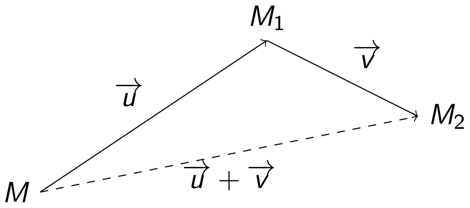
M

II. Somme de deux vecteurs



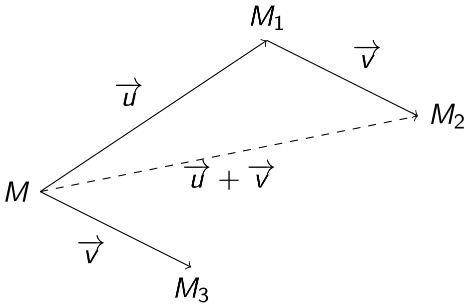
II. Somme de deux vecteurs

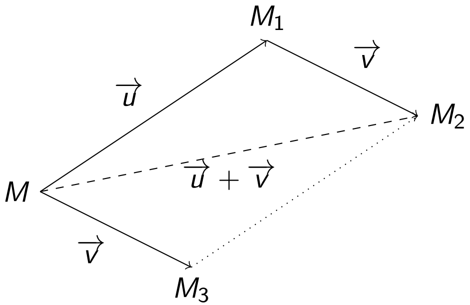




M_1
$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}$
M_2
M
$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

II. Somme de deux vecteurs




M_1
$\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}$
M_2
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
M
$\overrightarrow{v}$
M_3

Remarque

Cette propriété, associée à la relation de Chasles permet de simplifier des sommes de vecteurs.

Remarque

Cette propriété, associée à la relation de Chasles permet de simplifier des sommes de vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$$

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **opposés** si et seulement si leur somme est le vecteur nul.

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **opposés** si et seulement si leur somme est le vecteur nul.

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

On peut alors noter $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$.

Remarques

- Deux vecteurs opposés sont donc de même direction, de même norme mais de sens contraires.

Remarques

- Deux vecteurs opposés sont donc de même direction, de même norme mais de sens contraires.
- Si A et B sont deux points du plan alors $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Remarques

- Deux vecteurs opposés sont donc de même direction, de même norme mais de sens contraires.
- Si A et B sont deux points du plan alors $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés,

Remarques

- Deux vecteurs opposés sont donc de même direction, de même norme mais de sens contraires.
- Si A et B sont deux points du plan alors $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$$