Lois de probabilités à densité

I. Lois de probabilités à densité

Il existe des variables aléatoires qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Il existe des variables aléatoires qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit dans ce cas que la variable aléatoire est continue.

I. Lois de probabilités à densité

Il existe des variables aléatoires qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit dans ce cas que la variable aléatoire est continue.
La probabilité totale (égale à 1) est alors "répartie" sur $\mathbb{R}$ de façon continue.

Définition

Soit X une variable aléatoire.
On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est positive ou nulle ;

Définition

Soit X une variable aléatoire.
On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est positive ou nulle ;
- f est continue sauf, éventuellement, en un nombre fini de points ;

Définition

Soit X une variable aléatoire.
On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est positive ou nulle ;
- f est continue sauf, éventuellement, en un nombre fini de points ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$;

Définition

Soit X une variable aléatoire.
On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est positive ou nulle ;
- f est continue sauf, éventuellement, en un nombre fini de points ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$;
- Pour tout x réel, $P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Définition

Soit X une variable aléatoire.
On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- f est positive ou nulle ;
- f est continue sauf, éventuellement, en un nombre fini de points ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$;
- Pour tout x réel, $P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

On dit alors que f est une densité de X.

Remarques

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire peut donc être définie grâce à la densité.

Remarques

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire peut donc être définie grâce à la densité.
- Comme $\int_x^x f(t)\,dt = 0$, on a : $P(X < x) = P(x \leq x)$.

Remarques

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire peut donc être définie grâce à la densité.
- Comme $\int_x^x f(t)\,dt = 0$, on a : $P(X < x) = P(x \leq x)$.
- Par abus de langage, on peut définir une fonction de densité f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et non $\mathbb{R}$ tout entier.
  Dans ce cas, on considère que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin I$ et on se limite à une étude de la fonction sur I.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1; +\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1;+\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

- *Pour tout* $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$ *donc* f *est positive,*

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1; +\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

- *Pour tout* $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$ *donc* f *est positive,*
- f *est dérivable sur* $[1; +\infty[$ *donc continue sur* $[1; +\infty[$,

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1; +\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

- *Pour tout* $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$ *donc* f *est positive,*
- f *est dérivable sur* $[1; +\infty[$ *donc continue sur* $[1; +\infty[$,
- *Soit* $A \in [1; +\infty[$, *alors*

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{A}$$

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1; +\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

- *Pour tout* $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$ *donc* f *est positive,*
- f *est dérivable sur* $[1; +\infty[$ *donc continue sur* $[1; +\infty[$,
- *Soit* $A \in [1; +\infty[$, *alors*

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{A}$$

On a alors,

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1; +\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

- *Pour tout* $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$ *donc* f *est positive,*
- f *est dérivable sur* $[1; +\infty[$ *donc continue sur* $[1; +\infty[$,
- *Soit* $A \in [1; +\infty[$, *alors*

$$\int_1^A f(x)\ dx = \int_1^A \frac{1}{x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{A}$$

On a alors,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\ dx = \lim_{A\to+\infty} 1 - \frac{1}{A} = 1 = \int_1^{+\infty} f(x)\ dx$$

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $[1; +\infty[$. Montrer que f peut être une densité de probabilité.

- *Pour tout* $x \geqslant 1$, $f(x) > 0$ *donc* f *est positive,*
- f *est dérivable sur* $[1; +\infty[$ *donc continue sur* $[1; +\infty[$,
- *Soit* $A \in [1; +\infty[$, *alors*

$$\int_1^A f(x)\ dx = \int_1^A \frac{1}{x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{A}$$

On a alors,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)\ dx = \lim_{A \to +\infty} 1 - \frac{1}{A} = 1 = \int_1^{+\infty} f(x)\ dx$$

La fonction f *peut donc être une densité de probabilité.*

Propriété

Soit X une variable aléatoire de densité f. Alors, pour tous a, b réels tels que $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Or, on sait que pour tous les événements A et B, on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ donc

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Or, on sait que pour tous les événements A et B, on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ donc

$$P(a \leq X \leq B) = P(\{X \leq b\}) + P(\{X \geq a\}) - P(\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\})$$

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Or, on sait que pour tous les événements A et B, on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ *donc*

$P(a \leq X \leq B) = P(\{X \leq b\}) + P(\{X \geq a\}) - P(\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\})$

Or, $\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\} = \mathbb{R}$ *donc*

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Or, on sait que pour tous les événements A *et* B*, on a* $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ *donc*

$$P(a \leq X \leq B) = P(\{X \leq b\}) + P(\{X \geq a\}) - P(\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\})$$

Or, $\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\} = \mathbb{R}$ *donc*

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) + (1 - P(X < a) - 1$$

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Or, on sait que pour tous les événements A *et* B*, on a* $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ *donc*

$$P(a \leq X \leq B) = P(\{X \leq b\}) + P(\{X \geq a\}) - P(\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\})$$

Or, $\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\} = \mathbb{R}$ *donc*

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) + (1 - P(X < a) - 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(x < a)$$

Preuve

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{X \leq b\} \cap \{X \geq a\})$$

Or, on sait que pour tous les événements A et B, on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ *donc*

$$P(a \leq X \leq B) = P(\{X \leq b\}) + P(\{X \geq a\}) - P(\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\})$$

Or, $\{X \leq b\} \cup \{X \geq a\} = \mathbb{R}$ *donc*

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) + (1 - P(X < a) - 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(x < a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt + \int_{a}^{-\infty} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

Définition : Espérance

Soit X une variable aléatoire de densité f. L'espérance de X est, si elle existe, le réel :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\, dt$$

Définition

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a; b]$ si elle admet comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a; b]$ si elle admet comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

On peut "s'amuser" à vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Propriété

Soient a, b deux réels ($a < b$) et soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$.
Alors, pour tous les réels c et d appartenant à l'intervalle $[a; b]$ tels que $c < d$, on a

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Preuve

On sait que

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx$$

Preuve

On sait que

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_c^d$$

Preuve

On sait que

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_c^d = \frac{1}{b-a}\times d - \frac{1}{b-a}\times c$$

Preuve

On sait que

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_c^d = \frac{1}{b-a}\times d - \frac{1}{b-a}\times c$$

$$= \frac{d-c}{b-a}$$

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

$$15 \ min = \frac{1}{4}h \ et \ 20 \ min = \frac{1}{3}h.$$

On calcule donc

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

$15\ min = \frac{1}{4}h\ et\ 20\ min = \frac{1}{3}h.$

On calcule donc

$$P\left(\frac{1}{4} \leqslant T \leqslant \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-0}\, dx$$

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

$$15\ min = \frac{1}{4}h\ et\ 20\ min = \frac{1}{3}h.$$

On calcule donc

$$P\left(\frac{1}{4} \leqslant T \leqslant \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-0}\, dx = [x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}$$

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

$15\ min = \frac{1}{4}h$ et $20\ min = \frac{1}{3}h.$

On calcule donc

$$P\left(\frac{1}{4} \leqslant T \leqslant \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-0}\,dx = [x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

$15\ min = \frac{1}{4} h\ et\ 20\ min = \frac{1}{3} h.$

On calcule donc

$$P\left(\frac{1}{4} \leqslant T \leqslant \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-0}\, dx = [x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Exemple

Soit T une variable aléatoire associée au temps d'attente, en heures,à un guichet.
On suppose que T suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
Quelle est la probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes ?

$15 \ min = \frac{1}{4} h \ et \ 20 \ min = \frac{1}{3} h.$

On calcule donc

$$P\left(\frac{1}{4} \leqslant T \leqslant \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-0}\, dx = [x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

La probabilité d'avoir un temps d'attente compris entre 15 et 20 minutes est donc $\frac{1}{12}$.

Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ alors

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Preuve

X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ donc elle admet la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$,définie sur $(a; b]$, comme densité. On a alors

Preuve

X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ *donc elle admet la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$*,définie sur* $(a; b]$*, comme densité. On a alors*

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \times x\ dx$$

Preuve

X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ *donc elle admet la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$*,définie sur* $(a; b]$*, comme densité. On a alors*

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \times x\ dx = \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

Preuve

X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ *donc elle admet la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$*,définie sur* $(a; b]$*, comme densité. On a alors*

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \times x\ dx = \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2}{2} - \frac{1}{b-a} \times \frac{a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

Preuve

X suit une loi uniforme sur $[a;b]$ *donc elle admet la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$*,définie sur* $(a;b]$*, comme densité. On a alors*

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \times x\ dx = \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2}{2} - \frac{1}{b-a} \times \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

Preuve

X suit une loi uniforme sur $[a;b]$ donc elle admet la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{b-a}$,définie sur $(a;b]$, comme densité. On a alors

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \times x\ dx = \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2}{2} - \frac{1}{b-a} \times \frac{a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Définition

Soit $\lambda > 0$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ si elle admet comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition

Soit $\lambda > 0$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ si elle admet comme densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

On peut "s'amuser" à vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Propriété

Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ et x, a, b des réels positifs. Alors :

- $P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$

Propriété

Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ et x, a, b des réels positifs. Alors :

- $P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$
- $P(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$

Propriété

Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ et x, a, b des réels positifs. Alors :

- $P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$
- $P(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

  $$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0}$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement* $(X > x)$ *est l'événement contraire de l'événement* $P(X \leqslant x)$ *donc,*

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement* $(X > x)$ *est l'événement contraire de l'événement* $P(X \leqslant x)$ *donc,*

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x)$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement* $(X > x)$ *est l'événement contraire de l'événement* $P(X \leqslant x)$ *donc,*

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement* $(X > x)$ *est l'événement contraire de l'événement* $P(X \leqslant x)$ *donc,*

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement* $(X > x)$ *est l'événement contraire de l'événement* $P(X \leqslant x)$ *donc,*

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

- *Par propriété, pour tous les réels* a *et* b *positifs,*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

Preuve

- *Par définition, pour tout $x \geqslant 0$,*

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement $(X > x)$ est l'événement contraire de l'événement $P(X \leqslant x)$ donc,*

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

- *Par propriété, pour tous les réels a et b positifs,*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b$$

Preuve

- *Par définition, pour tout* $x \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda \times 0} = e^{-\lambda x} + 1$$

- *L'événement* $(X > x)$ *est l'événement contraire de l'événement* $P(X \leqslant x)$ *donc,*

$$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

- *Par propriété, pour tous les réels* a *et* b *positifs,*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a}$$

Propriété

Soient λ un réel strictement positif et t, h des réels positifs.
Si T est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + h) = P(T \geqslant h)$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h)=\frac{P((T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h))}{P(T\geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T\geqslant t)=1-P(T<t)=1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)=e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T\geqslant t+h)$ *et on a*

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T \geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T \geqslant t+h) = 1 - P(T < t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T \geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T \geqslant t+h) = 1 - P(T < t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h)$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T \geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T \geqslant t+h) = 1 - P(T < t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h)=\frac{P((T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h))}{P(T\geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T\geqslant t)=1-P(T<t)=1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)=e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T\geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T\geqslant t+h)=1-P(T<t+h)=e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h)=\dfrac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)}$

$$=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h)=\frac{P((T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h))}{P(T\geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T\geqslant t)=1-P(T<t)=1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)=e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T\geqslant t+h)$ *et on a*

$$P(T\geqslant t+h)=1-P(T<t+h)=e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h)=\dfrac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)}$

$$=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda(t+h)-(-\lambda t)}$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T \geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T \geqslant t+h) = 1 - P(T < t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h)-(-\lambda t)} = e^{-\lambda(t+h-t)}$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t)\cap(T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T \geqslant t)\cap(T \geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T \geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T \geqslant t+h) = 1 - P(T < t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h)-(-\lambda t)} = e^{-\lambda(t+h-t)} = e^{-\lambda h}$$

Preuve

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))}{P(T \geqslant t)}$$

Or, d'après les résultats précédents,

- $P(T \geqslant t) = 1 - P(T < t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
- *L'événement* $((T \geqslant t) \cap (T \geqslant t+h))$ *correspond à une durée de vie qui est supérieure à* t ***et*** *supérieure à* $t+h$ *donc cela correspond à l'événement* $(T \geqslant t+h)$ *et on a*

  $$P(T \geqslant t+h) = 1 - P(T < t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$$

Donc, $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h)-(-\lambda t)} = e^{-\lambda(t+h-t)} = e^{-\lambda h} = P(T \geqslant h)$$

Théorème de Moivre-Laplace *(admis)*

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (n entier naturel et $p \in]0, 1|$ et soit la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Alors,

Pour tous les réels a, b ($a \leqslant b$) on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

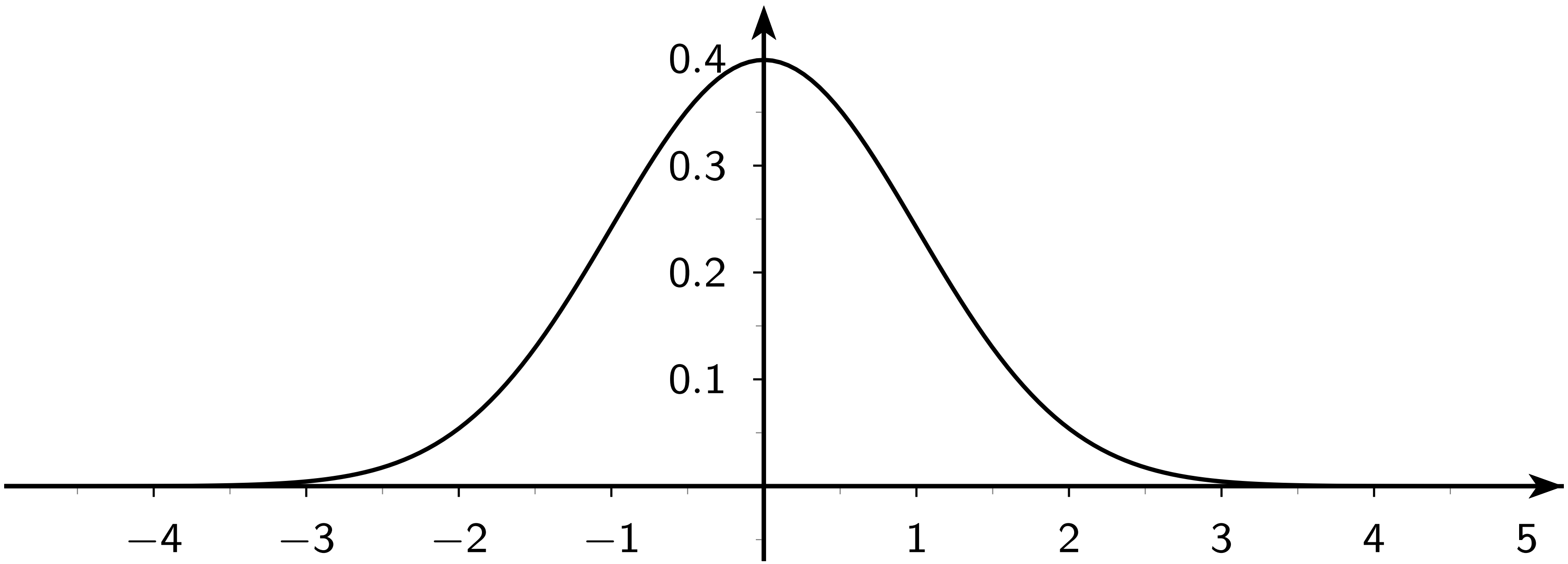
Remarque

On rappelle que X_n suivant une loi binomiale de paramètres n et p, np est l'espérance de X_n et $\sqrt{np(1-p)}$ son écart-type.

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée-réduite, notée $\mathcal{N}(0;1)$, si et seulement si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Représentation graphique de la fonction de densité de la loi normale centrée-réduite.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée-réduite ($\mathcal{N}(0;1)$) alors

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

Indication de preuve *La variance est admise, on calcule l'espérance.*
Soient les réels x *et* y *tels que* $x \geqslant 0$ *et* $y < 0$*. On a alors,*

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Indication de preuve *La variance est admise, on calcule l'espérance.*

Soient les réels x et y tels que $x \geqslant 0$ et $y < 0$. On a alors,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et}$$

$$\int_y^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_y^0 = -1 + e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Indication de preuve *La variance est admise, on calcule l'espérance.*
Soient les réels x *et* y *tels que* $x \geqslant 0$ *et* $y < 0$*. On a alors,*

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et}$$

$$\int_y^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_y^0 = -1 + e^{-\frac{y^2}{2}}. \text{ Donc,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

Indication de preuve *La variance est admise, on calcule l'espérance.*
Soient les réels x *et* y *tels que* $x \geqslant 0$ *et* $y < 0$. *On a alors,*

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et}$$

$$\int_y^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_y^0 = -1 + e^{-\frac{y^2}{2}}. \text{ Donc,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \int_y^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \lim_{y \to -\infty} -1 + e^{-\frac{y^2}{2}} = -1. \text{ Donc}$$

Indication de preuve *La variance est admise, on calcule l'espérance.*
Soient les réels x et y tels que $x \geqslant 0$ et $y < 0$. On a alors,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et}$$

$$\int_y^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_y^0 = -1 + e^{-\frac{y^2}{2}}. \text{ Donc,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \int_y^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \lim_{y \to -\infty} -1 + e^{-\frac{y^2}{2}} = -1. \text{ Donc}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -1 + 1 = 0$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée-réduite ($\mathcal{N}(0,1)$). Alors, Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = \alpha$$

Preuve

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

Preuve

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

On sait que F est la primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ s'annulant en 0*. On a alors,*

Preuve

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

On sait que F est la primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ s'annulant en 0. *On a alors,*

Pour tout réel x positif

$$\int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = F(x) - F(-x)$$

Preuve

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

On sait que F est la primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ s'annulant en 0. On a alors,

Pour tout réel x positif

$$\int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = F(x) - F(-x)$$

Soit la fonction $G : x \longmapsto F(x) - F(-x)$ définie sur $[0; +\infty[$. G est dérivable et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

Comme $G(0) = 0$

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

Comme $G(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

Comme $G(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

Comme $G(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$,

on en déduit que

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

Comme $G(0) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 1$, *on en déduit que*
G *est continue, puisque dérivable, et strictement croissante sur* $[0; +\infty[$ *à valeur dans* $[0; 1[$. *Donc,*

$$G'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $G'(x) > 0$ *donc* G *est strictement croissante sur* $(0; +\infty[$.

Comme $G(0) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$,
on en déduit que
G *est continue, puisque dérivable, et strictement croissante sur* $[0; +\infty[$ *à valeur dans* $[0; 1[$. *Donc,*

Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, *l'équation* $G(x) = \alpha$ *admet une unique solution* $u_\alpha \in [0; +\infty[$.

Valeurs Remarquables Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ alors :

Valeurs Remarquables Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

- $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$

Valeurs Remarquables Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

- $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$
- $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$

Valeurs Remarquables Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

- $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$
- $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
- $P(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,954$

Valeurs Remarquables Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

- $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$
- $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
- $P(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,954$
- $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$

Valeurs Remarquables Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

- $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,68$
- $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
- $P(-2 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,954$
- $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$
- $P(-3 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,997$

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si et seulement si sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarques

- L'expression de la fonction de densité n'est pas à connaître.

Remarques

- L'expression de la fonction de densité n'est pas à connaître.
- Le programme demande de considérer les paramètres μ et σ^2 mais très souvent, notamment dans les calculatrices, ce sont μ et σ qui sont considérés.

Remarques

- L'expression de la fonction de densité n'est pas à connaître.
- Le programme demande de considérer les paramètres μ et σ^2 mais très souvent, notamment dans les calculatrices, ce sont μ et σ qui sont considérés.
- La courbe représentant la fonction de densité d'une loi normale est appelée une gaussienne.

Propriété

Soit, dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction de densité f de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors :

Propriété

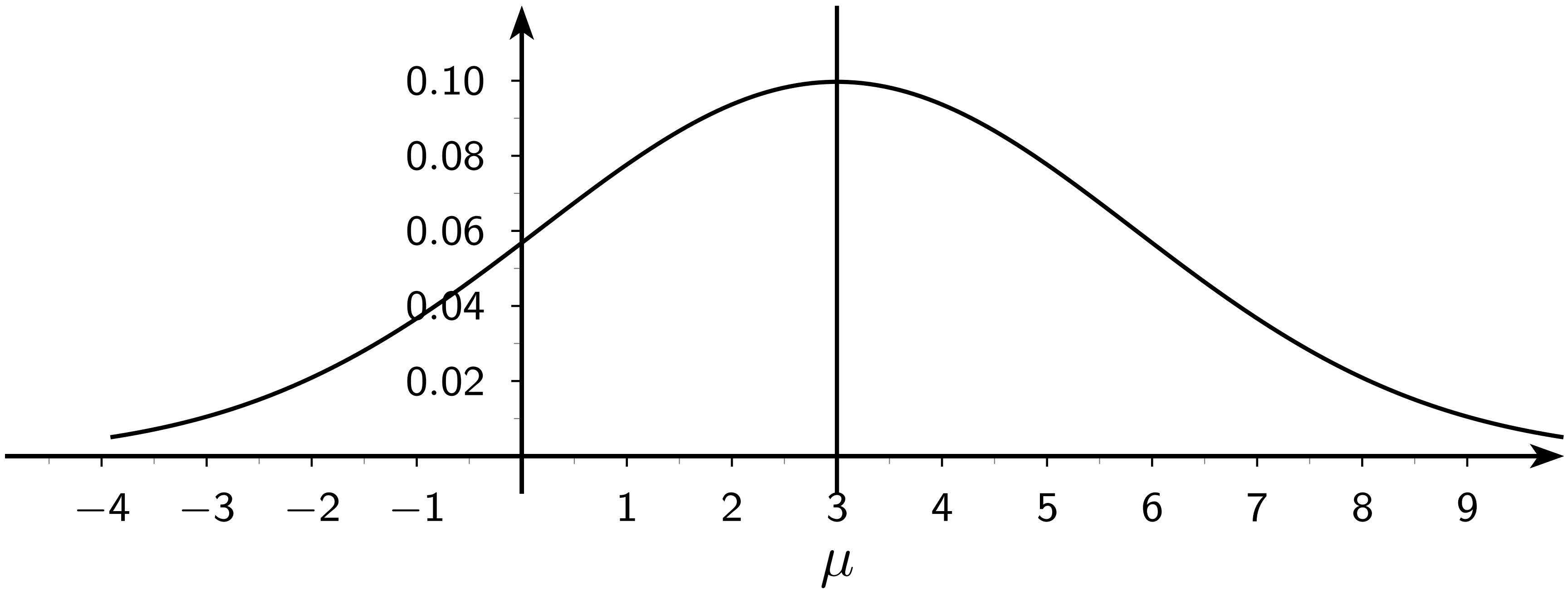
Soit, dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction de densité f de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors :

- f admet son maximum pour $x = \mu$ et ce maximum vaut : $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Le sommet de la courbe $\mathcal{C}$ a donc pour coordonnées $\left(\mu; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.

Propriété

Soit, dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction de densité f de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors :

- f admet son maximum pour $x = \mu$ et ce maximum vaut : $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Le sommet de la courbe $\mathcal{C}$ a donc pour coordonnées $\left(\mu; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.
- La droite d'équation $x = \mu$ est axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.



0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
μ

Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors

$$E(X)=\mu \quad \text{et} \quad V(X)=\sigma^2$$

Remarques

- Il est ainsi très courant de parler d'une loi normale d'espérance (ou moyenne) μ et d'écart-type σ.

Remarques

- Il est ainsi très courant de parler d'une loi normale d'espérance (ou moyenne) μ et d'écart-type σ.
- On ne peut pas calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ lorsque f est la densité d'une loi normale. Pour faire une approximation de cette intégrale, on utilisera un tableau de distribution de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ ou la calculatrice.

Remarques

- Il est ainsi très courant de parler d'une loi normale d'espérance (ou moyenne) μ et d'écart-type σ.
- On ne peut pas calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ lorsque f est la densité d'une loi normale. Pour faire une approximation de cette intégrale, on utilisera un tableau de distribution de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ ou la calculatrice.
- L'utilisation des propriétés de symétrie de la courbe représentative de la fonction de densité d'une loi normale est également très courante.

Remarques

- Il est ainsi très courant de parler d'une loi normale d'espérance (ou moyenne) μ et d'écart-type σ.
- On ne peut pas calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ lorsque f est la densité d'une loi normale. Pour faire une approximation de cette intégrale, on utilisera un tableau de distribution de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ ou la calculatrice.
- L'utilisation des propriétés de symétrie de la courbe représentative de la fonction de densité d'une loi normale est également très courante.
- La connaissance de quelques "valeurs de référence" est aussi très utile.

Propriété : Centrage et réduction

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

Remarque

On peut ainsi calculer des probabilités pour toutes les variables aléatoires suivant une loi normale en se référant uniquement à la loi normale centrée-réduite.

Remarque

On peut ainsi calculer des probabilités pour toutes les variables aléatoires suivant une loi normale en se référant uniquement à la loi normale centrée-réduite.
C'est très utile lorsqu'on n'a pas de calculatrice ou lorsqu'on ne connaît pas un des deux paramètres (μ ou σ).

Méthode

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 telle que l'un de ces deux paramètres est inconnu et on connaît $P(-a \leqslant a) = \alpha$ ($a > 0$ et α connu) alors on peut déterminer la valeur du paramètre manquant. Pour cela,

Méthode

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 telle que l'un de ces deux paramètres est inconnu et on connaît $P(-a \leqslant a) = \alpha$ ($a > 0$ et α connu) alors on peut déterminer la valeur du paramètre manquant. Pour cela,

- On fait un "centrage-réduction" de la variable aléatoire

$$P(-a \leqslant X \leqslant a) = \alpha$$

Méthode

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 telle que l'un de ces deux paramètres est inconnu et on connaît $P(-a \leqslant a) = \alpha$ ($a > 0$ et α connu) alors on peut déterminer la valeur du paramètre manquant. Pour cela,

- On fait un "centrage-réduction" de la variable aléatoire

$$P(-a \leqslant X \leqslant a) = \alpha$$

$$P(-a - \mu \leqslant X - \mu \leqslant a - \mu) = \alpha$$

Méthode

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 telle que l'un de ces deux paramètres est inconnu et on connaît $P(-a \leqslant a) = \alpha$ ($a > 0$ et α connu) alors on peut déterminer la valeur du paramètre manquant. Pour cela,

- On fait un "centrage-réduction" de la variable aléatoire

$$P(-a \leqslant X \leqslant a) = \alpha$$

$$P(-a - \mu \leqslant X - \mu \leqslant a - \mu) = \alpha$$

$$P\left(\frac{-a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

La variable $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée-réduite donc on sait qu'il existe u_α positif tel que

La variable $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée-réduite donc on sait qu'il existe u_α positif tel que

$$P\left(u_\alpha \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant u_\alpha\right) = \alpha$$

La variable $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée-réduite donc on sait qu'il existe u_α positif tel que

$$P\left(u_\alpha \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant u_\alpha\right) = \alpha$$

- On résout l'équation $\dfrac{a-\mu}{\sigma} = u_\alpha$ pour déterminer la valeur du paramètre manquant.

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type inconnu σ.
Sachant que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On sait que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ *donc*

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type inconnu σ.
Sachant que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On sait que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ *donc* $P(X - 10 \leqslant 20 - 10) = 0,75$ *c'est-à-dire*

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type inconnu σ.
Sachant que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On sait que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ *donc* $P(X - 10 \leqslant 20 - 10) = 0,75$ *c'est-à-dire* $P(X - 10 \leqslant 10) = 0,75$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type inconnu σ.
Sachant que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On sait que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ *donc* $P(X - 10 \leqslant 20 - 10) = 0,75$ *c'est-à-dire* $P(X - 10 \leqslant 10) = 0,75$.

Comme, par définition, $\sigma > 0$, *on en déduit que*

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type inconnu σ.
Sachant que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On sait que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ *donc* $P(X - 10 \leqslant 20 - 10) = 0,75$ *c'est-à-dire* $P(X - 10 \leqslant 10) = 0,75$.

Comme, par définition, $\sigma > 0$*, on en déduit que*

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma} \leqslant \frac{10}{\sigma}\right) = 0,75$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type inconnu σ.
Sachant que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On sait que $P(X \leqslant 20) = 0,75$ *donc* $P(X - 10 \leqslant 20 - 10) = 0,75$ *c'est-à-dire* $P(X - 10 \leqslant 10) = 0,75$.

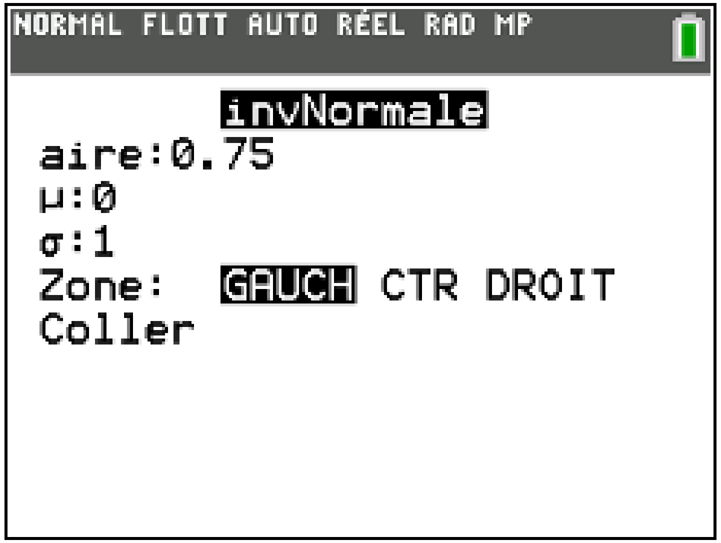
Comme, par définition, $\sigma > 0$*, on en déduit que*

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma} \leqslant \frac{10}{\sigma}\right) = 0,75$$

D'après la propriété de centrage-réduction, on sait que la variable aléatoire $\dfrac{X-10}{\sigma}$ *suit la loi normale centrée-réduite* $(\mathcal{N}(0;1))$.

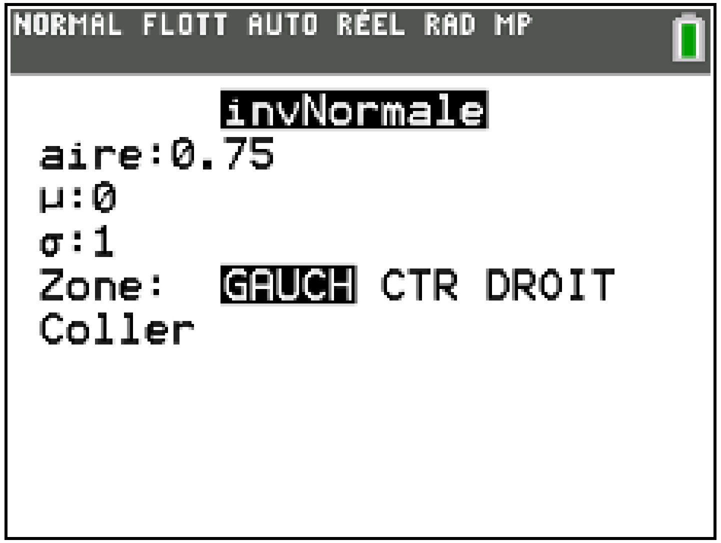
II. Lois de probabilités continues usuelles
Loi normale

Avec la calculatrice,



on trouve que

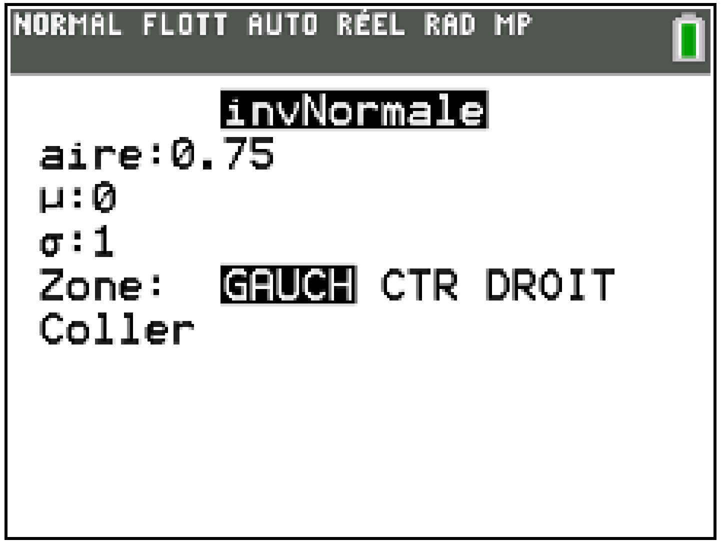
Avec la calculatrice,



on trouve que

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma}\leqslant 0,674\right)\approx 0,75$$

Avec la calculatrice,

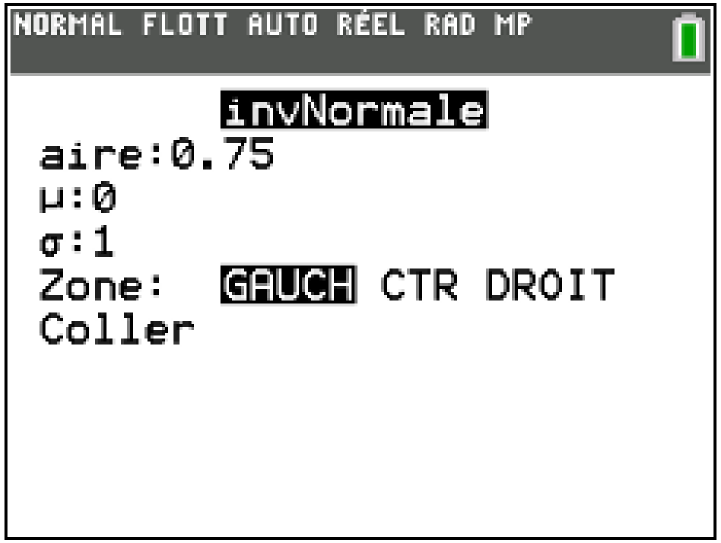


on trouve que

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma}\leqslant 0,674\right)\approx 0,75$$

On a donc $\dfrac{10}{\sigma}=0,674$ *donc*

Avec la calculatrice,

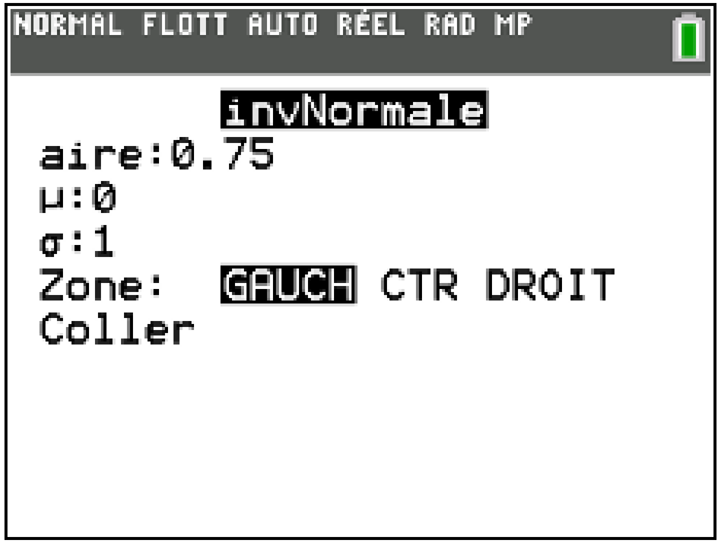


on trouve que

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma} \leqslant 0,674\right) \approx 0,75$$

On a donc $\dfrac{10}{\sigma} = 0,674$ *donc* $10 = 0,674\sigma$ *donc*

Avec la calculatrice,



on trouve que

$$P\left(\frac{X-10}{\sigma} \leqslant 0,674\right) \approx 0,75$$

On a donc $\dfrac{10}{\sigma} = 0,674$ *donc* $10 = 0,674\sigma$ *donc*
$\sigma = \dfrac{10}{0,674} \approx 14,837$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors,

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors,

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors,

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors,

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors,

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Remarque

Cela permet de faire, sans calculatrice, des calculs de probabilités pour ces cas particuliers.