Limite d'une fonction

1 Définitions, limites usuelles

Définitions : Limite en l'infini

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit ℓ un réel.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout réel A, il existe un réel B tel que $x > B$ implique $f(x) > A$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout réel A, il existe un réel B tel que $x < B$ implique $f(x) > A$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si, pour tout réel A, il existe un réel B tel que $x > B$ implique $f(x) < A$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si, pour tout réel A, il existe un réel B tel que $x < B$ implique $f(x) < A$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel B tel que $x > B$ implique $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel B tel que $x < B$ implique $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Exemple

Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, il faut donc montrer qu'il existe un réel B tel que $x < B$ implique $0 - \varepsilon < \dfrac{1}{x} < 0 + \varepsilon$.

Pour cela, on résout, sur $]-\infty; 0[$, l'inéquation $-\varepsilon < \dfrac{1}{x} < \varepsilon$.

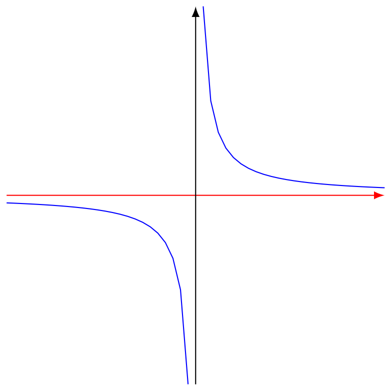
Comme $x < 0$, on en déduit que $\dfrac{1}{x} < 0 < \varepsilon$. Il faut donc considérer la seconde inégalité $-\varepsilon < \dfrac{1}{x}$. Comme il s'agit de deux nombres négatifs, on en déduit que cette inéquation équivaut à $-\dfrac{1}{\varepsilon} > x$. Ainsi, en posant $B = -\dfrac{1}{\varepsilon}$, on obtient que $x < B$ implique $0 - \varepsilon < \dfrac{1}{x} < 0 + \varepsilon$. On a donc bien que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Définition

Soit f une fonction définie sur $]-\infty; b] \cup [a; +\infty[$ (a, b réels).

La courbe représentant f admet la droite d'équation $y = a$ pour **asymptote horizontale au voisinage de** $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.

Illustration graphique



La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentant la fonction inverse aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

Définitions : Limites en une valeur finie

Soient a et ℓ deux réels. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si, pour tout réel A, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $a - \alpha < x < a + \alpha$ implique $f(x) > A$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si et seulement si, pour tout réel A, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $a - \alpha < x < a + \alpha$ implique $f(x) < A$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $a - \alpha < x < a + \alpha$ implique $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Remarque

On peut imposer que x tende vers a uniquement par valeurs inférieures ou supérieures. Dans ce cas, on parle de **limite à gauche** ou **limite à droite** et on note

- pour la limite à gauche : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ce qui imposera de considérer l'encadrement $a - \alpha < x < a$;
- pour la limite à droite : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ce qui imposera de considérer l'encadrement $a < x < a + \alpha$;

Exemple

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Soit $A > 0$, *il faut donc montrer qu'il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que* $0 < x < 0 + \alpha$ *implique* $\frac{1}{x} > A$.

Pour cela, on résout, sur $]0; +\infty[$ *l'inéquation* $\frac{1}{x} > A$ *qui équivaut à* $0 < x < \frac{1}{A}$.

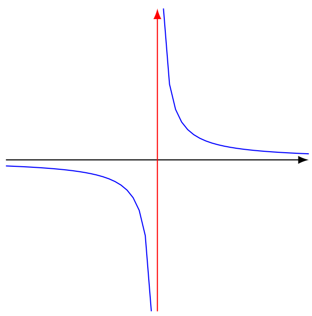
Ainsi, en posant $\alpha = \frac{1}{A}$, *on obtient que* $0 < x < 0 + \alpha$ *implique* $\frac{1}{x} > A$ *on a donc bien* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Définition

Soit f une fonction définie sur $[b; a[\cup]a; c]$.

La courbe représentant f admet la droite d'équation $x = a$ pour **asymptote verticale** si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Illustration graphique



La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction inverse.

Remarque

Dans un exercice, lorsque il est demandé d'interpréter graphiquement une limite, il est attendu l'équation d'une droite asymptote à la courbe représentant la fonction.

Propriétés : Limites usuelles

Soit a un réel. Pour tout n entier naturel non nul,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \text{pour } a \geqslant 0,\ \lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

II. Calcul de limites

Propriétés : Opérations les limites

Soient f et g des fonctions dont les ensembles de définitions sont compatibles, ℓ et ℓ' deux réels. a est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = ...$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = ...$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = ...$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = ...$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = ...$	ℓ'	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = ...$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = ...$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	ℓ	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = ...$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ...$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0	FI	FI

Pour les produits et les quotients, on applique la règle des signes.

Cas particuliers

- Dans le cas d'une limite au voisinage de $\pm\infty$, les formes indéterminées sont gérées comme pour les limites de suites.
- Lorsque on calcule la limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0 :
  - soit le numérateur ne tend pas vers 0 et il faut alors étudier le signe du dénominateur pour savoir s'il tend vers 0^+ ou 0^- ;
  - soit le numérateur tend également vers 0 et on peut alors écrire que $x = a + h$ et faire tendre h vers 0 au lieu de faire tendre x vers a.

Exemples

Calculer les limites suivantes

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x^2 + 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2+1}{4-2x}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{1-2x}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

Propriétés : Limites et comparaison

a est soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Soient f, g, h des fonctions des fonctions définies au voisinage de a.
Soit ℓ un réel.

- Si, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Propriété

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Indication de preuve

- *L'étude de la fonction $f : x \longmapsto e^x - x - 1$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ permet de prouver que, pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $e^x \geqslant x + 1$.*

$\lim_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ *donc, par comparaison,* $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

- *Pour tout réel* x, $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ *et* $\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$ *donc* $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

  On en déduit que,
$$\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

Propriété : Croissance comparée

Soit n un entier naturel non nul.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^ne^x=0$$

Preuve

- *Soit la fonction* $f:x\longmapsto e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1$ *définie sur* $[0;+\infty[$.

  Pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f'(x)=e^x-\dfrac{2x}{2}-1=e^x-x-1$.

  Or, pour tout réel $x\geqslant 0$, $e^x\geqslant x+1$ *donc* $f'(x)\geqslant 0$ *donc* f *est croissante sur* $[0;+\infty[$.
  On a donc, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant f(0)$. *Or,* $f(0)=0$ *donc on a, pour tout réel* $x\geqslant 0$,

  $e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1\geqslant 0$ *ce qui équivaut à* $e^x\geqslant\dfrac{x^2}{2}+x+1$ *ce qui implique, pour tout réel* $x>0$, $\dfrac{e^x}{x}\geqslant\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{x}{2}$.

  Or, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ *donc, par comparaison,* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

- *Pour tout entier naturel* n *non nul et pour tout réel* $x>0$,
$$\frac{e^x}{x^n}=\frac{e^{n\times\frac{x}{n}}}{n^n\left(\dfrac{x^n}{n^n}\right)}=\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{n^n\left(\dfrac{x}{n}\right)^n}=\frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\dfrac{x}{n}}\right)^n$$

  D'après le résultat précédent, pour tout réel $x>0$, $\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\dfrac{x}{n}}\geqslant\dfrac{x}{2n}$ *donc, la fonction*

$x \longmapsto x^n$ *étant croissante sur* $]0;+\infty[$,

$$\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \geqslant \frac{x^n}{(2n)^n}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{(2n)^n} = +\infty$, *on en déduit, par comparaison que*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

- *Pour tout réel* x, $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ *donc* $x^n e^x = \frac{x^n}{e^{-x}} = (-1)^n \frac{(-x)^n}{e^{-x}} = (-1)^n \frac{1}{\frac{e^{-x}}{(-x)^n}}$.

  Lorsque x *tend vers* $-\infty$, $-x$ *tend vers* $+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$ *donc, par quotient* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.